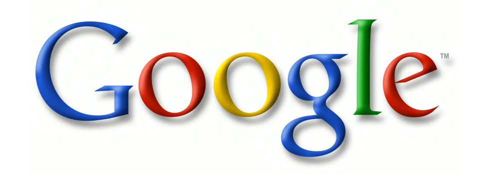
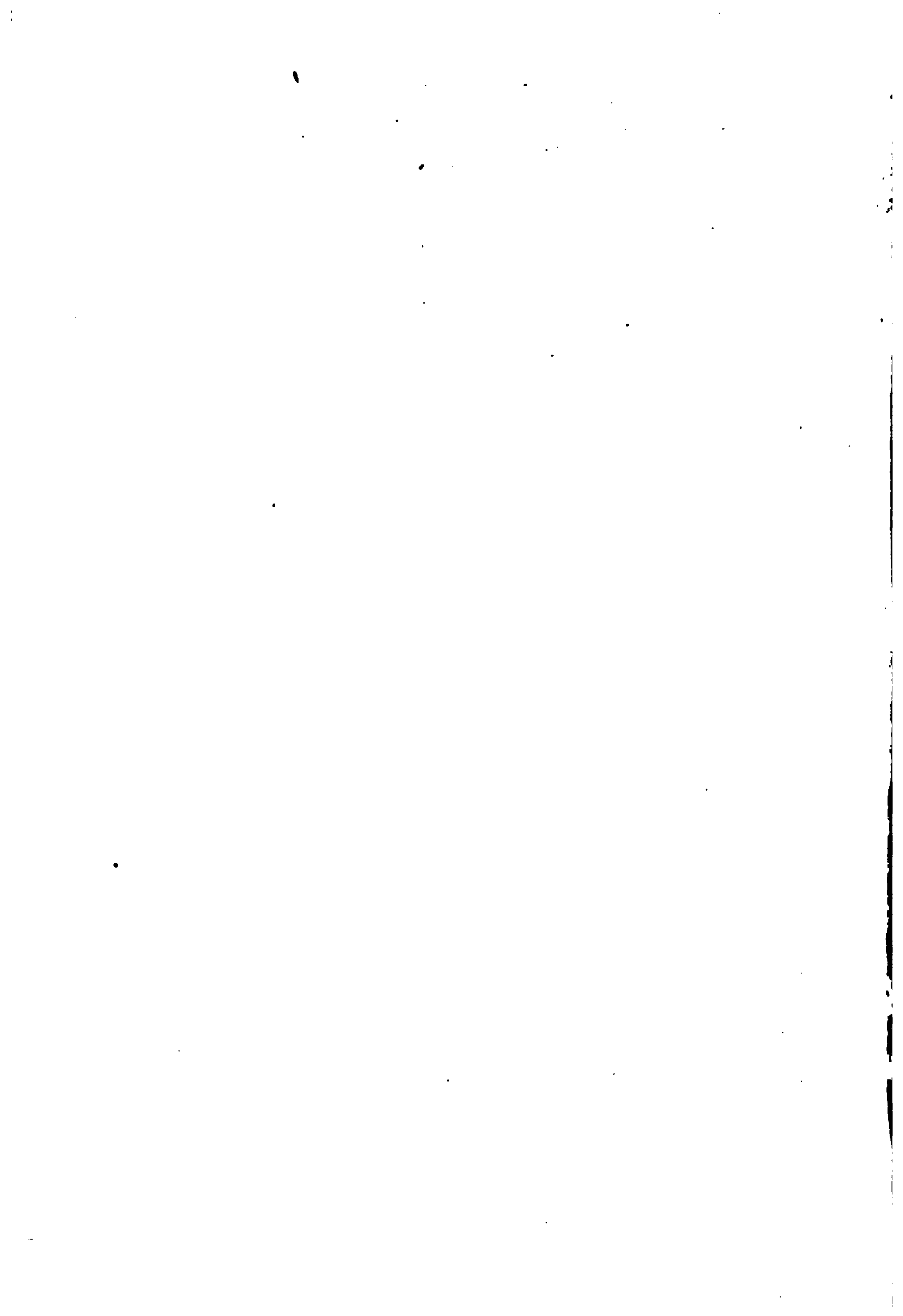




Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der vierten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe (1837) aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. Edmund Külp,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Zweiten Bandes drittes Buch, erste Abtheilung,

enthaltend

die Differential- und Integralrechnung.

Bern, Chur und Leipzig,

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1843.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Inhalt.

Zweiten Bandes drittes Buch, erste Abtheilung.

(Die Differential- und Integralrechnung.)

Erstes Kapitel.

Differentialrechnung.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung.

Drittes Kapitel.

Integration der Funktionen einer Veränderlichen.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung.



Erstes Kapitel.

Differentialrechnung.

Vorbegriffe. Der Taylor'sche Lehrsatz.

§. 1. Je bedeutender die Anzahl der Dinge ist, über die eine Wissenschaft sich erstreckt, und je mehr Mannigfaltigkeit sie in ihren Anwendungen darbietet, um so größer wird auch die Schwierigkeit, eine genaue, charakteristische Definition darüber aufzustellen, welche das ganze Gebiet derselben vollständig zu erkennen gibt und sämmtliche möglicherweise daran zu knüpfenden Gegenstände umfaßt. In einem solchen Falle befinden wir uns mit jenem Zweige der höhern Analysis, welche Differentialrechnung heißt; dieselbe wird nämlich auf so verschiedenartige Aufgaben angewendet, daß wir ihre Natur erst dann näher zu bestimmen im Stande sind, nachdem wir einige vorläufige Bemerkungen haben vorausgehen lassen.

Wir betrachten deshalb eine zwischen den Veränderlichen x und y gegebene Gleichung $y=fx$, die wir als den Repräsentanten einer auf zwei rechtwinklige Achsen Ax, Ay bezogenen ebenen Curve BMM' (Fig. 1) ansehen können. Legen wir jetzt der Abscisse x eine Reihe beliebiger Werthe bei und berechnen die entsprechenden Ordinaten y, so erhalten wir eine Folge von Punkten M, M'... unserer Curve, und zwar werden diese Punkte durch einen gewissen Zwischenraum von einander getrennt sein, so nahe die successiven Werthe von x auch an einander liegen mögen. In diesem Zustande drückt mithin die Gleichung $y=fx$ keineswegs aus, daß zwischen den Punkten Stetig-

keit vorhanden ist. Eine ähnliche Betrachtung läßt sich bei jeder Gleichung zwischen 3, 4 . . . Veränderlichen anstellen. Es entsteht daher die Frage, ob die Analysis kein geeignetes Mittel darbiete, wodurch das Gesetz der Stetigkeit in den Funktionen ausgesprochen wird.

Um die Ideen mehr zu fixiren, betrachten wir die Gleichung $y=ax^3+bx^2+c$. Nachdem wir den Punkt M, dessen Coordinaten x und y sind, gewählt, nehmen wir einen zweiten Punkt M', um ihn mit dem ersten zu vergleichen, wobei wir seine Coordinaten AP', $P'M'$ durch $x+h$ und $y+k$ darstellen wollen.

Wir haben hiernach:

$$y+k=a(x+h)^3+b(x+h)^2+c,$$

oder nach geschehener Entwicklung:

$$y+k=ax^3+bx^2+c+(3ax^2+2bx)h+(3ax+b)h^2+ah^3.$$

Betrachten wir dies Resultat etwas näher, so sehen wir, daß der Coefficient der ersten Potenz von h, nämlich $3ax^2+2bx$, aus der vorgelegten Funktion hergeleitet ist, das Gepräge derselben an sich trägt und ihr allein nur zukommt; überdem hängt dieser Coefficient keineswegs von dem besondern Werthe des Zuwachses h ab, der nichts anders als der Abstand PP' der Endpunkte der Abscissen zweier Punkte der Curve ist. Der fragliche, bei jeder Funktion verschiedene, von den absoluten Werthen der Zuwachse immer unabhängige Coefficient, charakterisirt hiernach auf eine ihm eigene Weise den Gang der Funktion durch die verschiedenen Werthe, die sie erlangen kann, wie nahe solche auch an einander liegen mögen; er drückt daher aus, daß die Funktion in ihren Aenderungen das Gesetz der Stetigkeit befolge. Die Coefficienten von h^2, h^3 . . . nehmen ebenfalls an dieser Eigenschaft Theil. Hieraus folgern wir, daß allemal, wenn eine vorgelegte Aufgabe, wie deren Beschaffenheit auch sein mag, auf dem Begriffe der Stetigkeit beruht, die Coefficienten der Potenzen von h in der Entwicklung unserer Funktion, nachdem $x+h$ statt x darin gesetzt worden, auf gehörige Weise combinirt und analysirt, ein Mittel darbieten werden, diese Stetigkeit durch die Rechnung auszudrücken.

Die nämliche Schlußfolge wollen wir nun auf den allgemeinen Fall $y=fx$, wo das Zeichen f jede beliebige Funktion von x darstellt,

anwenden. Setzen wir mithin $x+h$ statt x und $y+k$ statt y, so haben wir $y+k=f(x+h)$, wo es sich jetzt darum handelt, $f(x+h)$ in der Art zu entwickeln, daß die mit den verschiedenen Potenzen von h behafteten Glieder zum Vorschein kommen. Es wird diese Rechnung durch die Natur der Funktion näher bedingt, und wir werden bald sehen, auf welche Weise sie sich für jede Form von f bewerkstelligen läßt. Vor der Hand wollen wir uns mit der Bemerkung begnügen, daß, wenn man $h=0$ nimmt, wodurch auch k Null wird und der zweite Punkt mit dem ersten zusammenfällt, sämmtliche Glieder der in Frage stehenden Entwicklung von $f(x+h)$ verschwinden müssen, in denen h als Faktor erscheint; es bleibt demnach blos das erste Glied übrig, das folglich $f(x)$ oder y sein muß. Zugleich ist hieraus ersichtlich, daß h mit keinem negativen Exponenten behaftet vorkommen kann; denn enthielte die Entwicklung von $f(x+h)$ ein Glied von der Form $Mh^{-m}=\frac{M}{h^m}$, so würde dasselbe für $h=0$ unendlich werden und man würde die ursprüngliche Funktion fx nicht wiederfinden. Daraus folgt, daß die Entwicklung von $f(x+h)$ mit $fx+$ einer Reihe von Gliedern gleichlautend ist, in denen h auf verschiedenen positiven Potenzen als Faktor vorkommt.

Anmerkung. Die Funktion $f(x+h)$ läßt sich allemal in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe entwickeln, wenn x keinen bestimmten Werth hat. Denn käme in der Entwicklung von $f(x+h)$ ein Glied von der Form $Mh\,h^{\frac{m}{n}}$ vor, so würde die Funktion irrational sein, folglich wegen dieser Irrationalität eine gewisse Anzahl verschiedener Werthe besitzen; diese Anzahl muß mit jener Funktion $f(x+h)$ oder deren Entwicklung nothwendigerweise übereinstimmender werden, weil die Substitution von $x+h$ statt x die Zahl der in fx vorkommenden Radikalgrößen weder vermehren, noch vermindern, noch deren Natur überhaupt verändern kann, so lange x und unbestimmt bleiben. Hätte man daher für $f(x+h)$ die Reihe:

$$fx+Ah+Bh^2\ldots+Mh\,h^{\frac{m}{n}}+\ldots,$$

so ließe sich jeder Werth von fx mit jedem Werthe von $\sqrt[n]{h^m}$ in Verbindung bringen, wodurch die entwickelte Funktion eine

größere Anzahl verschiedener Werthe als die unentwickelte bekommen würde, was unzuläßig ist.

§. 2. Man kann übrigens darthun, daß im Allgemeinen

$$f(x+h)=f(x)+y'h+\alpha h \ldots (1),$$

d. h., daß in der Entwicklung von $f(x+h)$, außer dem Gliede $f(x)$, dessen Existenz vorhin nachgewiesen worden, noch vorkommen müsse:

1. Ein Glied $y'h$, enthaltend die erste Potenz von h, multiplicirt mit einer gewissen Funktion von x, welche durch y' dargestellt sein mag;

2. Ein Aggregat von andern Gliedern, in denen h auf höhern Potenzen als der erstern erscheint, und die durch αh repräsentirt werden mögen: α ist hiernach eine Funktion von x und h, worin das letztere nur mit ganzen positiven Exponenten versehen, anzutreffen ist.

Um die Richtigkeit dieses Satzes, welcher der gesammten Differentialrechnung als Grundlage dient, darzuthun, wollen wir durch den Punkt M (x, y) an die Curve BMM', deren Gleichung $y=fx$ ist, eine Tangente TH legen. Wir finden bekanntlich diese Gerade dadurch, daß durch den Punkt M eine beliebige Secante gezogen wird, welche man dann um diesen Punkt sich drehen läßt, bis die Durchschnittspunkte M und M' zusammenfallen. Um diese geometrische Operation in algebraische Sprache zu übertragen, vertauschen wir x mit $x+h$ und y mit $y+k$, wodurch ein zweiter Punkt M' der Curve in Betracht genommen wird. Hierdurch entsteht für die Ordinate $P'M'$:

$$y+k=f(x+h). \text{ Nun ist:}$$

$$MQ=h,\ P'M'=f(x+h),\ M'Q=k, \text{ oder}$$

$$k=P'M'-PM=f(x+h)-fx,$$

woraus mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks $MM'Q$ entspringt:

$$\operatorname{tang} M'MQ=\frac{M'Q}{MQ}=\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Um die Lage der gesuchten Berührungslinie daraus herzuleiten, müssen wir uns in diesem Ausdrucke h immer kleiner und kleiner werdend denken, bis es endlich Null wird, wodurch angedeutet wird, daß der Punkt M' dem Punkte M fortwährend näher rücke, bis beide zusammenfallen. Die rechte Seite obiger Gleichung, wenn man darin $h=0$ setzt, ist folglich der Werth von $\operatorname{tang} HMQ$.

Da nun die gesuchte Lage unserer Berührungslinie von dem Punkte M abhängt, so ist klar, daß wir als Resultat eine Funktion von x finden werden: dieselbe möge y′ heißen.

Hiernach besteht unser gedachtes zweites Glied aus zwei Theilen, wovon der eine von dem besondern Zuwachse unabhängig ist, und der andere ein Aggregat von Gliedern ausmacht, in welchen h als Faktor erscheint und die verschwinden, wenn man h=0 macht. Wird die Gesammtheit dieser Glieder durch α bezeichnet, welches mithin eine Funktion von x und h ist; so haben wir:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=y'+\alpha \ldots (2),$$

eine Gleichung, die mit der obenstehenden (1) übereinstimmt, wenn man den Nenner h wegschafft und fx versetzt. Unser Raisonnement würde übrigens nicht mehr in ganzer Strenge gelten, wenn sich durch den betrachteten Punkt (x, y) der Curve keine Tangente an dieselbe legen ließe, was sich jedoch nur in einigen besondern Fällen ereignen wird, wo in der That die Differentialrechung sich nicht deutlich ausspricht. So lange man sich aber an allgemeine Fälle hält, für welche nämlich x unbestimmt bleibt, wird jederzeit die Gleichung (1) ihre Richtigkeit haben.

§. 3. Die Entwicklung von f(x+h) läßt sich also immer, von welcher Beschaffenheit die Funktion f auch sein mag, durch schickliche Rechnungen in verschiedenen Gliedern angeben, wovon das erste die vorgelegte Funktion fx ausmacht, das zweite ein Glied von der Form y′h ist, in welchem der Zuwachs h nur auf der ersten Potenz vorkommt und der andere Faktor eine gewisse Funktion von x ist, die übrigen in dem Ausdruck αh begriffenen Glieder endlich verschiedene, höhere Potenzen von h enthalten, d. h., daß α zum Verschwinden kommt, wenn h=0 gesetzt wird.

Der Coefficient y′ des zweiten Gliedes y′h ist, wie gesagt, eine Funktion von x, deren Beschaffenheit durch die vorgelegte Funktion y oder fx ganz bedingt ist; überdem ist dieser Coefficient, wegen seiner Unabhängigkeit von h besonders geeignet, das Vorhandensein der Stetigkeit in der Funktion f auszudrücken, weil er von der gleichzeitigen Betrachtung zweier Punkte der Curve herrührt, welche so nahe, als man nur immer will, aneinander liegen. Dieser Faktor y′ der ersten

Potenz von h ist nun das, was man die Derivirte oder den Differentialcoefficienten der Funktion y nennt: man stellt ihn auch durch $f'x$ dar. (Vergleiche hiermit die höhere Algebra.) Die Funktion α läßt sich selbst wieder, wie wir bald sehen werden, in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln, wo jeder Coefficient, eben so gut wie y', die Stetigkeit in der Funktion y ausdrücken kann. Diese Bemerkung thut übrigens unserer früheren Schlußfolge keinen Eintrag, da wir die bestimmte Abhängigkeit jener Coefficienten von y' nachweisen werden: nur wird man dann für gedachte Beziehung den einen oder den andern jener Coefficienten wählen können, wie es die vorliegende Aufgabe gerade mit sich bringt.

§. 4. Es ist leicht einzusehen, daß in der Gleichung (2) α desto mehr abnimmt, je kleiner h wird, mit welchem es zugleich verschwindet. Hieraus ergibt sich folgendes Resultat, das öfters eine vorzügliche Verfahrungsweise darbietet, die Funktion $f'(x)$ aus $f(x)$ herzuleiten, nämlich: die Derivirte y' einer Funktion y ist das, worauf sich das erste Glied der Gleichung (2) reducirt, wenn man $h=0$ setzt; d. h. die Derivirte y' oder der Differentialcoefficient ist die Grenze des Verhältnisses des Zuwachses dieser Funktion y zu jenem der Veränderlichen x: denn in der That ist der Zähler $f(x+h)-f(x)$ nichts anders als der Unterschied zwischen der geänderten Funktion und ursprünglichen und der Nenner h der dem x beigelegte Zuwachs.

§. 5. Es ist von Nutzen, den Ursprung des Wortes Differential zu kennen. Wir kehren deshalb zu der Gleichung (2) zurück, in welcher das Glied α auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit gebracht werden kann, während die von h unabhängige Größe constant bleibt: das zweite Glied nähert sich dann immer mehr und mehr dem Werthe y', so daß die Differenz $f(x+h)-f(x)$ für sehr kleine Werthe von h sich auf $y'h$ reducirt, welches, einen Theil der Differenz zwischen der geänderten und ursprünglichen Funktion ausdrückend, sehr kleine Differenz oder Differential genannt werden könnte. Leibnitz, welcher mit Newton als Erfinder der Differentialrechnung angesehen wird, stellte durch das Zeichen d den unendlich kleinen, einer Variabeln beigelegten Zuwachs dar, wonach dx und dy als Stellvertreter der oben gewählten Buchstaben h und k gebraucht werden, mithin $y'dx$ statt $y'h$ geschrieben, als Differential

von y gilt, d. h. $dy = y'dx$: die letztere Bezeichnung ist die gewöhnlichere.

Die Derivirte oder der Differentialcoefficient der Funktion $y = fx$ hat hiernach in y' oder $f'x$ oder $\frac{dy}{dx}$ seine Darstellung: derselbe ist also der Coefficient des zweiten Gliedes oder der ersten Potenz von h in der Entwicklung der geänderten Funktion $f(x+h)$, oder auch die Grenze des Verhältnisses der gleichzeitigen Zuwachse einer Funktion und ihrer Veränderlichen oder endlich der Coefficient der unendlich kleinen Differenz $dy = y'dx$, welche man findet, wenn man x um dx vermehrt.

Indem wir dem Worte Derivirte die vorhergehende Bedeutung lassen, können wir jetzt sagen: die Differentialrechnung ist derjenige Zweig der höhern Analysis, welcher zum Gegenstand hat, die Derivirten aller vorgelegten Funktionen zu suchen, und die besondern Eigenschaften derselben anzugeben; dabei werden jene Derivirten vorzugsweise in solchen Aufgaben Anwendung finden, in welchen die Stetigkeit der Funktion eines der Haupterfordernisse ausmacht.

Sehen wir den Ausdruck y' oder $f'(x)$ als bekannt an, wenn $f(x)$ gegeben ist; so wird derselbe, weil er eine Funktion von x ist, sich ebenfalls ändern und seinerseits eine Derivirte haben können, welche wir durch y'' oder $f''(x)$ darstellen wollen. Ebenso wird y''' oder $f'''x$ die Derivirte oder der Differentialcoefficient von y'' oder $f''x$, y^{IV} oder $f^{\text{IV}}x$ die von y''' oder $f'''x$ sein, u. s. w. Hieraus erhellet, was man unter den Derivirten oder Differentialcoefficienten der ersten, zweiten, dritten ... Ordnung zu verstehen hat.

Man schreibt den Differentialcoefficienten der zweiten Ordnung $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ gewöhnlich auch so: $\frac{d^2y}{dx^2}$; den der dritten Ordnung $\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}$ so: $\frac{d^3y}{dx^3}$, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ als primitive Funktion gilt. Daraus wird man leicht die Bezeichnungen für die folgenden Differentialcoefficien-

ten abnehmen. Bei diesen Operationen wird das Differential dx beständig als eine unveränderliche Größe betrachtet.

Anmerkung. Man hat sich wohl zu merken, daß der Buchstabe d hier keine Größe bedeutet, sondern bloß als Zeichen gilt, um die Benennung Differential auszudrücken, gleich wie bei den Logarithmen der Buchstabe l als Zeichen der Logarithmen gebraucht wird. Ebenso bedeutet in d^2y, d^2 nicht das Quadrat von d; sondern dieser Ausdruck dient nur dazu, das zweite Differential kurz und passend zu bezeichnen. Auch muß man sich hüten, zu übersehen, daß die Ausdrücke dx^2, dx^3 ... einerlei mit $(dx)^2$, $(dx)^3$ ... sind.

§. 6. Bis jetzt wissen wir noch nicht, auf welche Art x und h in α vorkommen. Beschäftigen wir uns daher nun mit der Entwicklung dieser Funktion. Indem wir $y'+\alpha$ durch P darstellen, haben wir:

$$f(x+h)=fx+Ph=y+Ph \ldots (3),$$

was, wenn $x+h=z$, mithin $h=z-x$ gesetzt wird,

$$fz=y+P(z-x) \text{ gibt.}$$

Die Größe P, welche vorhin eine Funktion von x und h war, ist jetzt in eine Funktion der Variabeln x und z übergegangen, die, wegen der Willkührlichkeit ihrer Differenz h, ganz unabhängig von einander sind. Man kann folglich z als eine gegebene constante Zahl betrachten, und x allein mit y und P, welche x enthalten, sich ändern lassen. Vertauschen wir daher $x+i$ mit x in der letztern Gleichung, so bleibt 1) fz unverändert; 2) verwandelt sich y in $y+y'i+\beta i$; 3) geht $P(z-x)$ in $(P+P'i+\gamma i)(z-x-i)$ über. Behalten wir in der gesammten Gleichung nur die Glieder bei, in denen i auf der ersten Potenz vorkommt; so haben wir:

$$o=y'i-Pi+P'i(z-x), \text{ woraus}$$
$$P=y'+P'(z-x) \ldots (4).$$

Diese Gleichung werde gerade wie die vorhergehende behandelt. Die Umänderung von x in $x+i$ gibt dann

$$P'=y''-P'+P''(z-x), \text{ woraus}$$
$$2P'=y''+P''(z-x) \ldots (5). \text{ Ebenso findet man:}$$
$$3P''=y'''+P'''(z-x) \ldots,$$
$$4P'''=y^{IV}+P^{IV}(z-x) \ldots$$

Eliminiren wir P, P', P'' ... mit Hülfe der Gleichungen (3), (4), (5) ..., und schreiben wieder h statt $z-x$; so entsteht:

$$f(x+h)=y+y'h+\frac{y''h^2}{2}+\frac{y'''h^3}{2\cdot3}+\frac{y^{IV}h^4}{2\cdot3\cdot4}\ldots(A).$$

Diese Formel heißt der Taylor'sche Lehrsatz, weil der englische Mathematiker Taylor sie zuerst erfand.

Der Gleichung (1) zufolge war nun jede Funktion $f(x+h)$ in einen Ausdruck von der Form $y+y'h+\alpha h$ entwickelbar, wobei der dritte Theil αh die, die erste Potenz von h übersteigenden, Glieder enthält; nach dem Taylor'schen Satze wäre daher die Bildung dieser letztern Glieder bekannt. Alles dies stimmt mit dem im §. 59 der höhern Algebra Gesagten vollkommen überein; nur bezeichnet hier fx eine beliebige Funktion von x, während dort es eine rationale ganze Funktion von x bedeutet.

Wir hätten also nachgewiesen, daß, so lange x keinen bestimmten Werth hat, jede Funktion von $x+h$ sich allemal in eine nach ganzen und positiven Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandeln läßt. Die Reihe (A) setzt uns in den Stand, diese Entwicklung für jede Funktion anzugeben, für welche die aufeinander folgenden Differentialcoefficienten $f'x$, $f''x$ ... oder y', y'' ... oder $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ... von fx aufgefunden werden können.

Als Beispiel soll die Funktion $y=x^m$ gelten. Dieselbe gibt $y'=mx^{m-1}$, weil solches der Coefficient von h in der Entwicklung von $(x+h)^m$ ist. Ebenso hat man

$$y''=m(m-1)x^{m-2},\ y''=m(m-1)(m-2)x^{m-3}\ \text{rc.}$$

Substituirt man hierauf in die allgemeine Reihe, so bekommt man $f(x+h)=(x+h)^m$ und man findet die Newton'sche Formel wieder.

Es ist also hinreichend das zweite Glied $mx^{m-1}h$ von $(x+h)^m$ zu kennen, um die ganze Entwicklung für jeden beliebigen Werth von m daraus abzuleiten.

Obgleich wir in der höhern Algebra gezeigt haben, wie sich verschiedene Funktionen in Reihen entwickeln lassen; so wollen wir jedoch dergleichen Ausdrücke vorerst aus der Taylor'schen Formel herleiten, was ganz einfach mittelst der Differentiationsregeln geschehen kann;

wir werden daher von solchen Reihen keinen Gebrauch machen, bevor wir ihre Richtigkeit nicht von Neuem nachgewiesen haben.

Differentiation der algebraischen Funktionen.

§. 7. Die Art der Zusammensetzung der Derivirten y' hängt nun ganz von der primitiven Funktion ab, von welcher sie das Gepräge an sich trägt. Es ist daher vorerst die Frage, gedachte Derivirte für alle gegebenen Funktionen zu bestimmen, was sich durch eine zweifache Verfahrungsweise bewerkstelligen läßt. Die erste ergibt sich unmittelbar aus der in der Gleichung (1) ausgesprochenen Definition. Man entwickelt nämlich $f(x+h)-fx$ nach den Potenzen von h, und behält bloß jene Glieder der Entwicklung bei, in welchen h auf der ersten Potenz erscheint; der Coefficient dieser Potenz ist der Differentialcoefficient oder die gesuchte Derivirte $y'=f'x=\frac{dy}{dx}$.

§. 8. Das zweite Verfahren fließt aus der Betrachtung der Grenzen. Man suche nämlich unmittelbar die Grenze zu bestimmen, welcher sich der Quotient $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ bei dem fortwährenden Abnehmen von h ohne Ende nähert; diese Grenze ist unsere Derivirte y'.

Obschon die Anwendung der einen oder der andern Form dieses Verfahrens bei allen Funktionen einer Variabeln keine Schwierigkeit hat, so ist es doch der Rechnung förderlich, die Derivirten der einfachsten Funktionen ein für allemal zu entwickeln, und aus den dabei gefundenen Resultaten eben soviele besondere Differentiationsregeln zu abstrahiren.

§. 9. Es sei $y=A+Bu-Ct\ldots$, wo A, B, C ... Constanten, u, t ... aber Funktionen von x sind. Um die Derivirte zu erhalten, setze man x+h statt x, hierdurch ändert sich A nicht, Bu verwandelt sich in $B(u+u'h+\alpha h)$, Ct in $C(t+t'h+\beta h)$.

Die geänderte Funktion ist folglich:

$Y=(A+Bu-Ct\ldots)+(Bu'-Ct'\ldots)h+B\alpha h-C\beta h\ldots$; daraus

$$y'=Bu'-Ct'\ldots:$$

Eine aus mehreren Gliedern bestehende Funktion hat also zur Derivirten die Summe der Derivirten der einzelnen Glieder, wobei solche ihre Vorzeichen und Coefficienten beibehalten, die constanten Glieder dagegen verschwinden.

Beispiele: 1. $y=a^2-x^2$ gibt $y'=-2x$.

2. $y=1+4x^2-5x-3x^3$ liefert $y'=8x-5-9x^2$.

§. 10. Es sei $y=u\cdot t$, wo u und t abermals Funktionen von x sind. Durch die Substitution von x+h statt x erhält man:

$$Y=(u+u'h+\alpha h)\cdot(t+t'h+\beta h);$$ woraus

$$y'=u't+ut'.$$

Es sei ferner $y=u\cdot t\cdot v$. Man setze $t\cdot v=z$; dadurch kommt $y=u\cdot z$, woraus $y'=u'z+uz'$. Es ist aber $z'=t'v+tv'$; folglich

$$y'=tvu'+tuv'+uvt'.$$

Diese Beweisart läßt sich leicht auf 4, 5 ... veränderliche Faktoren ausdehnen und man hat allgemein folgende Regel:

Die Derivirte eines Produktes von beliebig vielen Faktoren wird gefunden, wenn man die Derivirte eines jeden einzelnen Faktors mit dem Produkte aller übrigen Faktoren multiplicirt und die einzelnen Resultate addirt.

Beispiele: 1. $y=(a+x)(a-x)$ gibt $y'=-2x$.

2. Aus $y=(a+bx)x^3$ entsteht $y'=bx^3+3x^2(a+bx)$.

§. 11. Es seien z und u zwei identische Funktionen von x. Die Vertauschung von x mit x+h in z=u liefert:

$$z+z'h+\alpha h=u+u'h+\beta h;$$

woraus $z'=u'$. Eben so hat man $z''=u''$, $z'''=u'''$ ....

Die Derivirten von beliebiger doch einerlei Ordnung zweier identischen Funktionen sind folglich respektiv einander gleich.

§. 12. Es sei $y=\frac{u}{t}$, wo u und t Funktionen von x sind. Aus unserer Gleichung entspringt $ty=u$, was nach dem Vorhergehenden

$y't+yt'=u'$ gibt. Nimmt man hieraus den Werth von y', und substituirt für y den ihm gleichen Bruch $\frac{u}{t}$; so erhält man:

$$y'=\frac{u't-ut'}{t^2}.$$

Die Derivirte eines Bruches ist daher gleich der Derivirten des Zählers, multiplicirt mit dem Nenner, weniger der Derivirten des Nenners, multiplicirt mit dem Zähler, den Rest dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Beispiele: 1. $y=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{1-x}$ gibt $y'=\frac{1}{a}-\frac{(2-x)x}{(1-x)^2}$

2. $y=\frac{a+\frac{1}{2}bx^2}{3-2x}$ liefert $y'=\frac{(3-x)bx+2a}{(3-2x)^2}$.

Anmerkung. Die vorhergehende Regel hätte man auch auf folgende Art finden können. Aus der vorgelegten Gleichung $y=\frac{u}{t}$ entspringt nämlich, wenn man $x+h$ statt x setzt:

$$Y=\frac{u+u'h+\alpha h}{t+t'h+\beta h}=\frac{u}{t}+\frac{tu'-ut'}{t^2}h+\ldots;$$

d. h. $y'=\frac{tu'-ut'}{t^2}$ wie oben.

§. 13. Wenn der Zähler u constant ist, so ist $u'=0$ und man hat bloß $y'=-\frac{ut'}{t^2}$: d. h. die Derivirte eines Bruches mit constantem Zähler ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Produkte des Zählers mit der Derivirten des Nenners, durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Beispiele: 1. $y=\frac{4}{x^2}$ gibt $y'=-\frac{8}{x^3}$.

2. $y=-\frac{1}{x^3}$ liefert $y'=\frac{3}{x^4}$.

§. 14. Wir gehen jetzt zu den Derivirten der Potenzen über.

I. Es sei m eine ganze positive Zahl in $y=x^m$. Da $x^m=x\cdot x^{m-1}$, die theilweise Derivation, worin die Derivirte des erstern Faktors

vorkommt, aber $1 \cdot x^{m-1}$ ist, da ferner, m solcher Aggregate $1 \cdot x^{m-1}$ vorhanden sind, weil jedes Einzelne der m vorhandenen x ähnlicherweise herausgezogen werden kann; so hat man $y = mx^{m-1}$.

Für $y = z^m$, wo z eine Funktion von x ist, erhält man, da $z^m = z \cdot z^{m-1}$, und die Derivirte in Bezug auf den ersten Faktor $z' \cdot z^{m-1}$ ist:

$$y' = mz^{m-1}z',$$

wenn man erwägt, daß jeder der m Faktoren z die nämliche Derivirte liefert.

Beispiele: 1. Für $y = (a + bx + cx^2)^m$ findet man, wenn $z = a + bx + cx^2$ gesetzt wird:

$$z' = b + 2cx, \quad y' = mz^{m-1}z' = m(a + bx + cx^2)^{m-1}(b + 2cx).$$

2. Für $y = x^3(a + bx^2)$ hat man, wenn $a + bx^2 = z$ gemacht wird:

$$y' = 3x^2z + x^3z' = x^2(3a + 5bx^2).$$

3. $y = (a + bx)^2$ gibt $y' = 2b(a + bx)$.

4. Aus $y = (2x^3 - 5x^2 + 4x)^3$ entsteht

$$y' = 6(2x^3 - 5x^2 + 4x)^2(3x^2 - 5x + 2).$$

II. Es sei m eine ganze negative Zahl, d. h. $m = -n$. Man hat dann $y = z^m = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. Folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$y' = -\frac{nz^{n-1}z'}{z^{2n}} = -nz^{-n-1} \cdot z' = mz^{m-1} \cdot z'.$$

Beispiele: 1. Für $y = \frac{a}{x^p}$ hat man $y' = -\frac{pa}{x^{p+1}}$.

2. $y = (ax - bx^2)(cx^2 + d)^{-1}$ gibt $y' = \frac{ad - 2bdx - acx^2}{(cx^2 + d)^2}$.

III. Es sei m in $y = z^m$ eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$. Es ist dann $y = z^{\frac{p}{q}}$, oder $y^q = z^p$, wenn man das Ganze auf die qte Potenz erhebt. Indem man die Derivirten beider Theile, welche identische Funktionen von x sind, nimmt, erhält man nach dem Vorhergehenden, p und q mögen positive oder negative ganze Zahlen sein: $qy^{q-1} \cdot y' = pz^{p-1} \cdot z'$; hieraus, weil $p = qm$ und $y = z^m$,

$$qz^{mq-m}y' = qmz^{qm-1}z'; \text{ folglich } y' = mz^{m-1} \cdot z'.$$

IV. Die aufgezählten Fälle berechtigen uns zu folgendem Schluß: **Die Derivirte von z^m ist $mz^{m-1} \cdot z'$, m mag eine positive, negative, ganze oder gebrochene Zahl sein: d. h. ist gleich dem Produkte der Derivirten der bloßen Funktion z mit dem Exponenten und mit der um eine Einheit verminderten Potenz derselben;** die Derivirte z' ergibt sich übrigens aus der Gleichung $z = fx$.

Beispiele: 1. $y = \sqrt[4]{[(a+bx^2)^5]}$ gibt, wenn man $z = a+bx^2$ setzt,

$$y = z^{\frac{5}{4}};\ y' = \frac{5}{4} z \cdot {}^{\frac{1}{4}} z' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{(a+bx^2)} 2bx.$$

2. $y = \sqrt[5]{x^3}$ liefert $y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

3. $y = 5x^2 \sqrt[3]{x^2}$ gibt $y' = \dfrac{40x\sqrt[3]{x^2}}{3}$.

4. Für $y = \sqrt[3]{(x-x^2)}$ entsteht $y' = \dfrac{1-2x}{3\sqrt[3]{[(x-x^2)^2]}}$.

§. 15. Da man häufig Quadratwurzeln zu differentiiren bekommt, so hat sich für dergleichen Funktionen eine besondere Regel gebildet, welche aus folgender Rechnung hervorgeht.

Es sei $y = \sqrt{z}$; woraus $y' = \dfrac{z'}{2\sqrt{z}}$. **Man erhält folglich die Derivirte der Quadratwurzel aus einer Größe, wenn man die Derivirte dieser Größe durch die doppelte Quadratwurzel dividirt.**

Beispiele: 1. Für $y = a + b\sqrt{x} - \dfrac{c}{x}$ kommt $y' = \dfrac{b}{2\sqrt{x}} + \dfrac{c}{x^2}$.

2. Für $y = (ax^3+b)^2 + 2(x-b)\sqrt{a^2-x^2}$ erhält man

$$y' = 6ax^2(ax^3+b) + \frac{2a^2 - 4x^2 + 2bx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

3. $y = \dfrac{x}{-x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$ gibt

$$y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)} \cdot (2x^2+a^2-2x)\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

Hätte man den vorgelegten Bruch oben und unten mit $x + \sqrt{(a^2+x^2)}$ multiplicirt, so würde man erhalten haben:

$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a^2}\sqrt{(a^2+x^2)}; \text{ und } y'=\frac{2x}{a^2}+\frac{a^2+2x^2}{a^2\sqrt{(a^2+x^2)}}.$$

4. $$y=\frac{x^2-1}{\sqrt{(a^4+x^4)}} \text{ gibt } y'=\frac{2a^4x+2x^3}{(a^4+x^4)\sqrt{(a^4+x^4)}}.$$

Anmerkung. Die Derivirte von x^m hätte sich unmittelbar aus der Entwicklung von $(x+h)^m$ herleiten lassen, wenn man den Beweis der Binomialformel voraussetzen wollte, indem in dieser Entwicklung mx^{m-1} den Coefficienten der ersten Potenz von h bildet.

§. 16. Was die irrationalen und imaginären Exponenten anlangt, so haben wir nichts weiter darüber zu erinnern, indem auf sie die vorigen Regeln ebenfalls passen. (Man vergleiche hiermit das im §. 10 der höhern Algebra Gesagte.) Ein Beweis, der übrigens für alle Fälle gilt, ist folgender:

Durch die Substitution von $x+h$ statt x in $y=x^m$ erhält man

$$Y=(x+h)^m=y+y'h+ \text{ etc.; woraus}$$

$$\left(\frac{x+h}{x}\right)^m=\left(1+\frac{h}{x}\right)^m=(1+z)^m=1+\frac{y'z}{x^{m-1}}+ \text{ etc.},$$

wenn man das Ganze durch x^m dividirt und $h=xz$ setzt. Nun ist aber $(1+z)^m$ von x unabhängig, weil z, wegen der Willkürlichkeit von h, ganz beliebig ist, selbst wenn x einen bestimmten Werth hat; woraus hervorgeht, daß die Entwicklung von $(1+z)^m$ kein x mehr enthält, was sofort auch für das zweite Glied gilt. Man hat daher $\frac{y'}{x^{m-1}}=$ einer Constanten, d. h. y' muß dergestalt aus x zusammengesetzt sein, daß der Quotient $\frac{y'}{x^{m-1}}$ eine Funktion von m, wie fm, oder $y'=x^{m-1}\cdot fm$ werde. Es handelt sich jetzt darum, diese Funktion näher zu bestimmen. Wir haben:

$$(x+h)^m=x^m+hx^{m-1}\cdot fm+ \text{ etc.; desgleichen}$$

$$(x+h)^n=x^n+hx^{n-1}fn \text{ etc.: und}$$

$$(x+h)^{m+n}=x^{m+n}+hx^{m+n-1}\cdot f(m+n)+ \text{ etc.},$$

wenn man m in n und m+n verwandelt. Durch die Multiplikation der beiden ersten Gleichungen entsteht als Produkt die dritte Gleichung, nur kommt im erstern $fm+fn$ statt $f(m+n)$ vor; die Identität

der beiden Resultate erheischt aber $f(m+n)=fm+fn$. Betrachtet man nun n als den Zuwachs von m, so wird man haben:

$$f(m+n)=fm+nf'm+ \text{ꝛc}; \text{ mithin}$$

$$fn=nf'm+ \text{ꝛc}.$$

Da das erste Glied dieser Gleichung kein m enthält, so wird auch das zweite von m unabhängig oder mit andern Worten $f'm=$ einer unbekannten Zahl a sein müssen. Hieraus folgt

$$f''=f'''=\ldots=0; \text{ ferner } fn=an, \text{ und } fm=am.$$

Es bleibt uns jetzt die beständige Zahl a zu bestimmen übrig. Wir machen deshalb $m=1$ in

$$(x+h)^m=x^m+hx^{m-1}\cdot am+ \text{ꝛc}.;$$

was uns sofort gibt: $x+h=x+ha$; d. h. $a=1$.
Folglich $fm=m$ und man hat die Derivirte $y'=mx^{m-1}$.

Für $y=z^m$, wo z eine Funktion von x ist, bekommt man jetzt:
$f(x+h)=(z+z'h+\ldots)^m=z^m+mz^{m-1}\cdot z'h+$ ꝛc.; und $y'=mz^{m-1}z'$.

§. 17. Es sei $y=fx$ eine verwickelte Funktion, welche, wenn man einen Theil davon durch z ausdrückt, oder $z=Fx$ macht, einfacher wird und sich als bloße Funktion von z, von der Form $y=\varphi z$, herausstellt. Auf diese Art hat man folgende drei Gleichungen, von denen die erstere das Resultat der Elimination von z aus den zwei andern ist:

$$(1)\ y=fx,\ (2)\ z=Fx,\ (3)\ y=\varphi z.$$

Wir wollen jetzt die Derivirte $y'=\frac{dy}{dx}$ mittelst der beiden letztern Gleichungen herleiten, ohne uns deshalb der erstern zu bedienen. Zuvörderst müssen wir jedoch bemerken, daß unsere bisherige Bezeichnung durch Accente hier nicht mehr ausreicht, indem y' ebenso gut die Derivirte der ersten Gleichung, als jene der dritten darstellen kann, während in der einen x, in der andern z die unabhängige Veränderliche ist, und die Funktionen φ und F sehr verschieden von einander sind. Wir werden daher im vorliegenden Falle, und in andern ähnlichen, unsere zweite Bezeichnung wählen, d. h. $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dy}{dz}$ schreiben, je nachdem die Derivirte von y in Bezug auf die unabhängige Veränderliche x oder z genommen wird. Dies voraus-

geschickt, haben wir nun, wenn x mit x+h in (2) vertauscht und der Zuwachs von z durch k dargestellt wird:

$$k=\frac{dz}{dx}h+\ldots$$

Ferner erhalten wir aus (3), wenn z in z+k übergeht:

$$Y=\varphi(z+k)=y+\frac{dy}{dz}k \text{ etc.} \ldots$$

Folglich durch Substitution des Werthes von k:

$$Y=y+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}h+ \text{ etc.; woraus}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Der Sinn dieser Gleichung ist folgender: **Wenn** y **eine Funktion von** z, **und dieses wieder eine Funktion von** x, **und die Derivirte von** y **in Bezug auf die unabhängige Veränderliche** x **gefunden werden soll; so braucht man blos die Derivirte** $\frac{dy}{dz}$ **von** y **in Bezug auf** z, **als unabhängige Veränderliche, und die Derivirte von** z **in Bezug auf** x, **als unabhängige Veränderliche, zu suchen, um in dem Produkte** $\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ **die verlangte Derivirte von** y **in Bezug auf die unabhängige Veränderliche** x **zu erhalten.**

Es ist nicht weiter nöthig besondere Beispiele über diesen Lehrsatz, welcher uns übrigens in der Folge von vielfachem Nutzen sein wird, hier aufzuführen, indem er schon bei Bestimmung der Derivirten von z^m in Anwendung kam.

Anmerkung. Man könnte anfangs glauben, daß das Resultat

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

sich von selbst verstände, wenn man den Unterschied übersähe, welcher zwischen dem Divisor dz und dem Dividend dz stattfindet. Das erste dz zeigt nämlich hier nicht blos eine Division an, sondern auch, daß die Derivirte von y aus der Gleichung $y=\varphi z$ hergeleitet worden, indem z und nicht x einen

Zuwachs erhalten; während das zweite dz ausdrückt, daß die Derivirte von z aus der Gleichung $z=Fx$ herrührt, indem x einen Zuwachs bekommen.

§. 18. Es kann sich ereignen, daß die Zusammensetzung der Gleichung $y=fx$ die Einführung zweier Variabeln z und u, welche Funktionen von x sind, wünschenswerth macht; in welchem Falle die vorgelegte Gleichung $y=fx$ ... (1) das Resultat der Elimination von z und u zwischen folgenden drei Gleichungen ist:

$$(2)\ z=Fx,\ (3)\ u=\psi x,\ (4)\ y=\varphi(z,u).$$

Die Aufgabe wäre jetzt, vermittelst der drei letzten Gleichungen die Derivirte der erstern herzuleiten, gleichsam als hätte man darin x mit $x+h$ vertauscht. Diese in den Gleichungen (2) und (3) vorgenommene Transformation gibt uns für die respektiven Zuwachse k und i von z und u:

$$k=\frac{dz}{dx}h+\ldots;\ i=\frac{du}{dx}h+\ldots$$

Wir ändern jetzt z in $z+k$ und u in $u+i$ in der Gleichung (4) um, wobei z und u als unabhängige Veränderliche behandelt werden, weil dieser Theil der Rechnung der nämliche bleibt, k und i mögen einen bestimmten oder einen willkürlichen Werth haben. Hiernach ist es uns gestattet, vorerst z mit $z+k$ zu vertauschen, ohne dabei u zu ändern; alsdann in dem Resultate $u+i$ statt u zu setzen, und z dabei unverändert zu lassen. Diese zwiefache Rechnung wird uns zu demselben Endresultat führen, als wenn man beide Aenderungen auf einmal vorgenommen hätte.

Durch die Substitution von $z+k$ statt z in $y=\varphi(z,u)$, wobei y als Funktion der einzigen Veränderlichen z behandelt wird, verwandelt sich y in

$$y+\frac{dy}{dz}k+\ldots$$

Hierin haben wir jetzt $u+i$ statt u zu setzen, und z als constant zu betrachten. Diesem gemäß wird das erste Glied y in

$$y+\frac{dy}{du}i+\ldots$$

übergehen. Ebenso wird das zweite Glied $\frac{dy}{dz}k$ als Funktion von u

behandelt, bei dem Uebergange von u in u+i, eine Entwicklung liefern, deren erstes Glied $\frac{dy}{dz}k$ ist.

Auf solche Weise entspringt die Summe:

$$Y=y+\frac{dy}{du}i+\frac{dy}{dz}k+ \text{ꝛc.};$$

wobei es unnöthig ist die nachfolgenden Glieder mit in Betracht zu ziehen, da die Rechnung nur bezweckt, den Coefficienten von h aufzufinden, die Glieder in i^2, k^2, ik ... aber Ausdrücke in h^2, h^3 ... geben würden. Substituirt man in die vorhergehende Gleichung die für k und i oben gefundenen Werthe, so kommt:

$$Y=y+\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)h+ \text{ꝛc.}$$

Hieraus
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx},$$

wobei die in der letzten Note gemachte Bemerkung gleichfalls gilt.

§. 19. Hätte man in der transformirten Funktion $y=\varphi$, (z, u, t), drei Veränderliche, so müßte man in unserm zweiten Theile noch ein Glied von der Form $\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ hinzufügen, u. s. w. **Eine aus verschiedenen besonderen Funktionen zusammengesetzte Funktion wird folglich differentiirt, wenn man jede einzelne dieser Funktionen für sich differentiirt, dabei die in §. 17 angegebene Regel beobachtet, und darauf alle gefundenen Derivirten zu einer Summe vereinigt.**

Man sieht bald ein, daß die Derivirten von Produkten und Quotienten nichts anders als specielle Fälle dieses Lehrsatzes sind.

Beispiele: 1. Es sei $y=\frac{a+bx}{(1-x)^2}$. Man hat $y=\frac{z}{u^2}$, wenn man $z=a+bx$, $u=1-x$ setzt. Daraus $z'=b$, $u'=-1$. Die Derivirte von y in Bezug auf z ist $\frac{z'}{u^2}$; jene in Bezug auf u aber $\frac{-2zu'}{u^3}$.

Die Summe ist die gesuchte Derivirte; folglich

$$y' = \frac{b}{u^2} + \frac{2z}{u^3} = \frac{b+bx+2a}{(1-x)^3}.$$

2. $y = \frac{(1-x^2)^2-(3-2x)x}{4-5x}$. Daraus, wenn man setzt

$$z = 1-x^2,\ u = 3x-2x^2,\ t = 4-5x:$$

$$y = \frac{z^2-u}{t}.$$

Man nimmt nach und nach die Derivirten, indem nur eine der Veränderlichen z, u oder t in Betracht gezogen wird; auf solche Weise hat man:

$$z' = -2x,\ u' = 3-4x,\ t' = -5. \text{ Daraus}$$

$$y' = \frac{2zz'}{t} - \frac{u'}{t} - \frac{(z^2-u)t'}{t^2} = \frac{16x^3-15x^4-7}{(4-5x)^2}.$$

Wenn die den Veränderlichen z, u ... gleichzusetzenden Werthe nicht zu verwickelt sind, so zieht man vor, die Rechnung ohne Hülfe dieser Transformation zu bewerkstelligen, indem solche stillschweigend dabei unterlegt ist. Auf diese Art geben die nachstehenden Beispiele sofort:

1. $y = (a-2x+x^3)^3$, $y' = 3(a-2x+x^3)^2(3x^2-2)$.

2. $y = (ax-x^2)\sqrt[4]{(b-cx^3)}$, $y' = (a-2x)\sqrt[4]{(b-cx^3)}$

$$- \frac{3cx^2(ax-x^2)}{4\sqrt[4]{[(b-cx^3)^3]}}.$$

§. 20. Im Vorhergehenden sind alle Regeln zur Differentiation der algebraischen Funktionen enthalten; wir können nunmehr auf eben die Art die zweiten und höheren Derivirten herleiten. Ist nämlich y irgend eine algebraische Funktion von x, so findet man durch Differentiation die Derivirte y', woraus durch eine neue Differentiation die zweite Derivirte y'' gefunden wird. Differentiirt man weiter, so bekommt man die dritte Derivirte y''', und so lassen sich, auf diesem Wege fortgefahren, alle übrige höheren Derivirten finden, weil die Größen y', y'' rc. insgesammt algebraische Funktionen sind, welche man nach den gegebenen Regeln differentiiren kann.

Beispiele: 1. $y = x^{-1}$ gibt $y' = -x^{-2}$; $y'' = 2x^{-3}$;

$y''' = -2\cdot x^{-4}$, u. s. w.; $y^{(n)} = \pm 2\cdot 3\ldots nx^{-(n+1)}$;

2. $y=x^{\frac{1}{2}}$ liefert $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $y''=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

$$y'''=\frac{1\cdot 3}{2^3}x^{-\frac{5}{2}};\ y^{(n)}=\mp\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}.$$

3. Für $y=\frac{1}{\sqrt{[(1-x^2)]}}$ findet man:

$$y'=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}};\ y''=\frac{1+2x^2}{\sqrt{[(1-x^2)^5]}};$$

$$y'''=\frac{9x+6x^3}{\sqrt{[(1-x^2)^7]}};\ y^{IV}=\frac{9+72x^2+24x^4}{\sqrt{[(1-x^2)^9]}}\ \text{u. s. w.}$$

4. Für $y=x^m$ erhält man:

$$y'=mx^{m-1};\ y''=m(m-1)x^{m-2};\ y'''=m(m-1)(m-2)x^{m-3};$$

$$y^{(n)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

Anmerkung. Man wird leicht einsehen, daß wenn der Exponent m in $y=x^m$ eine positive ganze Zahl ist, die mte Derivirte keine Differentiation mehr zuläßt, weil sie keine Veränderliche mehr enthält; es werden daher alle höhern Derivirten dieser Funktion verschwinden.

§. 21. Mit Leichtigkeit läßt sich jetzt der Taylor'sche Lehrsatz auf alle algebraischen Funktionen anwenden, d. h. die Entwicklung derselben in eine Reihe nach steigenden Potenzen von h angeben, nachdem darin x mit x+h vertauscht worden.

Beispiele: 1. Es sei $y=x^{-1}$. Benutzt man die oben gefundenen Derivirten der verschiedenen Ordnungen, so kommt:

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}\ldots\pm\frac{h^n}{x^{n+1}},$$

welche Entwicklung eine geometrische Progression bildet.

2. $y=\frac{x^2-a^2}{x}=x-\frac{a^2}{x}$ gibt ebenso

$$f(x+h)=\frac{x^2-a^2}{x}+\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)h-\frac{a^2h^2}{x^3}+\ldots$$

3. Für $y=\sqrt{x}$ findet man, wenn man statt der Derivirten x', y'' ... ihre Werthe in die Taylor'sche Formel einführt:

$$\sqrt{(x+h)}=\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}}-\frac{1\cdot h^2}{2\cdot 4\sqrt{x^3}}\ldots\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}\cdot\frac{h^n}{2\cdot 3\ldots n}.$$

4. Ueberhaupt führt dieser Lehrsatz, auf $y=x^m$ angewandt, sogleich zur Newton'schen Binomialformel für alle Fälle, welchen Werth der Exponent m auch haben mag; nämlich:

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + m\frac{m-1}{2}x^{m-2}h^2 + \ldots$$

$$+ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \ldots \frac{m-n+1}{n} x^{m-n} h^n \ldots$$

Differentiation der transcendenten Funktionen.

§. 22. Die Exponentialfunktion $y=fx=a^x$, ist die einfachste dieser Gattung. Substituirt man in ihr $x+h$ statt x, so bekommt man:

$$f(x+h) = a^{x+h} = a^x \cdot a^h = a^x + y'h + \text{ꝛc. } (§.\ 2);$$

woraus, wenn man durch a^x dividirt, entspringt:

$$a^h = 1 + \frac{y'}{a^x}h + \text{ꝛc.}$$

Da der erste Theil dieser Gleichung von x unabhängig ist, so darf der zweite Theil, mithin auch der Coefficient des zweiten Gliedes, kein x mehr enthalten. Hiernach stellt sich die gesuchte Derivirte y', von solcher Beschaffenheit in Bezug auf x heraus, daß ihr Quotient durch a^x eine constante, von der Basis abhängige, Größe k wird, d. h. $y'=ka^x$.

Hieraus findet man die Derivirten der höhern Ordnungen, nämlich:

$$y''=k^2a^x,\ y'''=k^3a^x \ldots\ y^{(n)}=k^n a^x.$$

Vermittelst dieser Derivirten erhält man nach dem Taylor'schen Satz folgende Reihe:

$$a^h = 1 + kh + \frac{k^2h^2}{2} + \frac{k^3h^3}{2\cdot 3} + \ldots \text{ oder } h \text{ mit } x \text{ vertauscht,}$$

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3 \cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{k^4x^4}{2\cdot 3\cdot 4} \ldots$$

Diese Reihe gibt, wenn man darin $x=\frac{1}{k}$ setzt:

$$a^{\frac{1}{k}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

Bezeichnet man den Zahlenwerth der zweiten Seite mit e, wonach, wenn man mehrere Glieder derselben entwickelt, $e=2,718281828\ldots$;

so hat man $a^{\frac{1}{k}}=e$, oder $a=e^k$. Daraus folgt, wenn man die Logarithmen nimmt:

$$k=\frac{\text{Log } a}{\text{Log } e}=la=\frac{1}{\log e},$$

je nachdem die Logarithmen für eine beliebige Basis, oder in dem Neper'schen Systeme, oder für die Basis a genommen werden, indem wir hier die nämliche Bezeichnungsart, wie im §. 175 der höhern Algebra gelten lassen. Die Differentialrechnung gibt uns also genau die dort gefundenen Resultate wieder.

§. 23. Es sei $y=a^z$, wo $z=fx$. Die Differentiationsregeln geben $y'=a^z \cdot z'la$, wobei z' aus $z=fx$ herzuleiten ist. Die Derivirte einer Exponentialgröße ist folglich das Produkt aus der Exponentialgröße mit der Derivirten des Exponenten und dem Neper'schen Logarithmen der Basis.

Beispiele: 1. $y=e^{mz}$ gibt $y'=e^{mz}\cdot mz'$.

2. $y=a^{3x+1}$ $y'=a^{3x+1}\cdot 3la$.

3. $y=a^{\sqrt{(2x+1)}}$ .... $y'=a^{\sqrt{(2x+1)}}\cdot\frac{la}{\sqrt{(2x+1)}}$.

4. $y=e^x(x^3-3x^2+6x+6)$ ... $y'=e^x\cdot x^3$.

Anmerkung. Zu der Derivirten von $y=e^z$, wo z eine Funktion von x ist, würde man sofort gelangen, wenn man von der Formel

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\ldots$$

ausgehen wollte. Dieselbe gibt, wenn man sie der Differentiation unterwirft:

$$y'=z'\left(1+z+\frac{z^2}{1\cdot 2}\ldots\right)=e^z\cdot z'.$$

§. 24. Für $y=\text{Log}\,x$ erhält man nach der im §. 7 aufgestellten Regel:

$$Y=\text{Log}(x+h)=\text{Log}\,x+y'h+ \text{ꝛc.}: \text{woraus}$$

$$\text{Log}(x+h)-\text{Log}x=\text{Log}\left(\frac{x+h}{x}\right)=\text{Log}(1+z)=y'xz+ \text{ꝛc.},$$

wenn man $h=xz$ setzt. Stellen wir jetzt eine ähnliche Betrachtung

an wie im §. 15, der zufolge z unabhängig von x ist, indem durch eine passende Aenderung der Willkürlichen h die Größe z constant bleiben kann, während x sich ändert; so sehen wir ein, daß der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung, mithin auch das Glied $y'xz$, kein x mehr enthalten darf. Unser gesuchtes y' wird daher in Bezug auf x von solcher Beschaffenheit sein, daß das Produkt $y'x = M$ ist, wo M eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet. Hieraus findet man die höhern Derivirten, nämlich:

$$y'' = -\frac{M}{x^2},\ y''' = \frac{2M}{x^3},\ y^{\mathrm{IV}} = -\frac{2\cdot 3M}{x^4} \ldots$$

Substituirt man diese Werthe in die Taylor'sche Formel, so kommt:

$$\mathrm{Log}(x+h) = \mathrm{Log}\,x + M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} \ldots\right);\ \text{oder}$$

$$\mathrm{Log}(1+z) = M(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots).$$

Um die Constante M, welche durch die Basis a näher bedingt wird, kennen zu lernen, sei t der Logarithme von $1+z$. Hiernach

$$a^t = 1+z = 1 + kt + \tfrac{1}{2}k^2t^2 \ldots;\ \text{woraus}$$

$$z = kt(1 + \tfrac{1}{2}kt \ldots).$$

Substituiren wir diesen Werth in die Reihe von $\mathrm{Log}(1+z)$, so finden wir, nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Faktors t:

$$1 = Mk(1 + \tfrac{1}{2}kt \ldots) - \tfrac{1}{2}Mk^2t(1 + \tfrac{1}{2}kt \ldots)^2 \ldots$$

Diese Relation muß für jedes beliebige t stattfinden, während k und M ihre constanten Werthe beibehalten. Machen wir daher $z=0$, was $t=0$, und $Mk=1$ gibt; so finden wir:

$$M = \frac{1}{k} = \log e = \frac{1}{la}.\ \text{Folglich}\ y' = \frac{1}{xla}.$$

Man sieht sehr bald ein, daß die Größe M mit dem, was im §. 176 der höhern Algebra der Modul genannt worden, gleichbedeutend ist, d. h. daß sie nichts anders als den constanten Faktor ausdrückt, mit welchem man die Neper'schen Logarithmen zu multipliciren hat, um von ihnen zu den einem andern System angehörigen überzugehen.

Wir finden also hier abermals eine völlige Uebereinstimmung mit den früher auf anderem Wege erhaltenen Resultaten.

§. 25. Es sei $y = \text{Log}\, z$, wo z eine Funktion von x ist. Man hat

$$y' = \frac{Mz'}{z} = \frac{z'}{z l a}.$$

Die Derivirte des Logarithmen einer Funktion ist folglich gleich der Derivirten dieser Funktion, multiplicirt mit dem Modul und dividirt durch die Funktion selbst. Im Neper'schen System wird dieser Faktor M gleich 1.

Beispiele: 1. $y = l\left(\frac{u}{t}\right)$ gibt . . . . $y' = \frac{tu' - ut'}{ut}$.

2. $y = \text{Log}\, z^n$ . . . . $y' = \frac{Mnz'}{z}$.

3. $y = \text{Log} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$ . . . $y' = \frac{M}{x(1+x^2)}$.

4. $y = \text{Log}(x + \sqrt{1+x^2})$ . . $y' = \frac{M}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

5. $y = l \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1+x^2+x)}}{\sqrt{(1+x^2-x)}}\right)} \ldots y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$.

6. $y = l \cdot \frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}} \ldots y' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Anmerkung. Man hätte auch die Derivirte einer logarithmischen Funktion aus jener der Exponentialfunktion herleiten können, und umgekehrt. Die Differentiation von $y = a^z$ gibt nämlich:

$$y' = y \cdot z' la; \text{ woraus } z' = \frac{y'}{y la} = \frac{My'}{y}.$$

Und umgekehrt, liefert uns diese letztere wenn man erwägt, daß $a^z = y$ und $M = \frac{1'}{la}$, die Derivirte $y' = z' \cdot y \cdot la = a^z \cdot z' \cdot la$.

§. 26. Die Anwendung der Logarithmen erleichtert öfters die Differentiation zusammengesetzter Exponentialausdrücke:

Beispiele: 1. $y = z^t$, wo z und t beliebige Funktionen von x sind, gibt $ly = t \cdot lz$. Durch Differentiation entsteht hieraus:

$$\frac{y'}{y} = \frac{tz'}{z} + t' \cdot lz, \text{ oder } y' = z^t \left(\frac{tz'}{z} + t' \cdot lz\right).$$

2. $y=a^{b^z}$ liefert $ly=b^z\cdot la$. Nimmt man die Derivirten beider Seiten, so entsteht:

$$y'=a^{b^z}\cdot b^z\cdot z'a\cdot l\cdot lb.$$

3. Für $y=z^{t^u}$ kommt $ly=t^u\,lz$. Folglich

$$\frac{y'}{y}=\frac{t^u\,z'}{z}+.lz.t^u\left(\frac{ut'}{t}+u'\cdot lt\right),\text{ oder}$$

$$y'=z^{t^u}\cdot t^u\left(\frac{z'}{z}+u'\cdot lt\cdot lz+\frac{ut'lz}{t}\right).$$

4. Aus $y=x^x$ folgt $y''=x^x\left(\frac{1}{x}+(1+\cdot lx)^2\right)$.

§. 27. Suchen wir jetzt die Derivirte von $y=\sin x$, wobei der Radius $=1$ angenommen wird. Zu diesem Zweck betrachten wir die Gleichungen:

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h=y+y'h+ \text{ꝛc.}$$
$$\sin(x-h)=\sin x\cos h-\cos x\sin h=y-y'h+ \text{ꝛc.}$$

Durch Subtraction der zweiten von der ersten entsteht:

$$2\cos x\sin h=2y'h+ \text{ꝛc., oder}$$

$$\sin h=\frac{y'}{\cos x}h+ \text{ꝛc.}$$

Da das zweite Glied kein x enthalten darf, so reducirt sich der Coefficient von h auf eine unbekannte Constante A: also $y'=A\cos x$; ferner $\sin h=Ah+$ ꝛc.

Aus der letztern folgt: $\frac{\sin h}{h}=A+$ ꝛc.

Da nun, wenn h sich fortwährend der Null nähert, das Verhältniß $\frac{\sin h}{h}$ sich immer mehr und mehr der Einheit nähert (siehe §. 178 der höhern Algebra die Anmerkung) und derselben beliebig nahe gebracht werden kann: so hat man offenbar $A=1$; mithin $y'=\cos x$.

Für $z=\cos x$ haben wir auf ähnliche Weise:

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h=z+z'h+ \text{ꝛc.},$$
$$\cos(x-h)=\cos x\cos h+\sin x\sin h=z-z'h+ \text{ꝛc},$$

aus welchen Gleichungen durch Subtraktion entspringt:

$$2\sin x\sin h=-2z'h+ \text{ꝛc.}$$

Hieraus, wenn man beiderseits durch $2\sin x$ dividirt,

$$\sin h=-\frac{z'}{\sin x}h+ \text{ꝛc.}$$

Wird diese Gleichung mit der früher gefundenen $\sin h = h + \text{rc.}$ zusammengehalten, so kommt:

$$\frac{-z'}{\sin x} = 1, \text{ d. h. } z' = -\sin x.$$

Kennt man einmal die Derivirten von $\sin x$ und $\cos x$, so ist es leicht zu den Derivirten der höhern Ordnungen überzugehen; man findet hierbei, daß sie in folgender Ordnung periodisch wiederkehren:

$$\sin x, \ \cos x, \ -\sin x, \ -\cos x.$$

Die Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes gibt hiernach:

$$\sin(x+h) = \sin x\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2\cdot3\cdot4}\cdots\right)$$
$$+ \cos x\left(h - \frac{h^3}{2\cdot3} + \frac{h^5}{2\cdots5}\cdots\right).$$

Machen wir darin successive $x=0$ und $=90^0$, so finden wir die im §. 178 der höhern Algebra ausgeführten Reihen wieder, nämlich:

$$\sin h = h - \frac{h^3}{2\cdot3} + \frac{h^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdots, \text{ und}$$

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2\cdot3\cdot4}\cdots$$

Anmerkungen: 1. Die Derivirte von $z=\cos x$ hätte man auch folgendermaßen ableiten können. Bekanntlich ist $z=\sin(\frac{1}{2}\pi - x)$, oder, wenn $\frac{1}{2}\pi - x = u$ gesetzt wird, $z=\sin u$. Weil nun

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \text{ ferner}$$

$$\frac{dz}{du} = \cos u \text{ und } \frac{du}{dx}, = -1; \text{ so ist}$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = -\sin x.$$

2. Die Derivirten von $y=\sin x$ und $z=\cos x$ lassen sich auch noch auf folgendem Wege erhalten. Man hat

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h,$$
$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h;$$

wo es sich jetzt darum handelt, $\sin h$ und $\cos h$ in Reihen auszudrücken. Zu diesem Behufe bemerken wir, daß, wie jene

Reihen auch beschaffen sein mögen, sie nur von der Form: $Ah^m+Bh^n \ldots$ sein können, wo $m, n \ldots$ positive, steigend geordnete Zahlen sind. Für $x=h$ erhält man nach der ersten jener Fundamentalformeln:

$$\sin 2h = 2\sin h\sqrt{(1-\sin^2 h)}\text{; folglich, weil}$$
$$\sin h = Ah^m + Bh^n + \text{rc.},$$
$$\sin 2h = 2^m Ah^m + 2^n Bh^n + \text{rc. } (1).$$

Andererseits ist aber

$$2\sin h(1-\sin^2 h)^{\frac{1}{2}} = 2\sin h(1-\tfrac{1}{2}\sin^2 h + \text{rc.}) = 2\sin h - \sin^3 h + \text{rc.}$$
$$= 2Ah^m + 2Bh^n + \text{rc.} - A^3h^{3m} - \text{rc. } (2).$$

Die Identität der Ausdrücke (1) und (2) liefert $2A=2^m A$, oder $m=1$.

Das erste Glied der Reihe für $\sin h$ ist daher Ah, und die beiden ersten Glieder der Reihe für $\cos h$ sind $1-\frac{A^2h^2}{2}\ldots$

Mittelst dieser Werthe haben wir jetzt:

$$\sin(x+h) = \sin x + hA\cos x + \text{rc.}$$
$$\cos(x+h) = \cos x - hA\sin x + \text{rc.}\text{; folglich}$$
$$y' = A\cos x \text{ und } z' = -A\sin x.$$

Hinsichtlich eines strengeren Beweises für die Richtigkeit der Gleichung $A=1$ sehe man die Anmerkung des oben citirten Paragraphen der höhern Algebra nach.

§. 28. Es lassen sich nun leicht die Derivirten der übrigen trigonometrischen Linien verschaffen.

1. Für $y=\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ findet man $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, d. h. die Derivirte der Tangente eines Bogens ist gleich der Einheit, dividirt durch das Quadrat des Cosinus des Bogens.

2. Für $y=\cot x$ erhält man $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

3. $y=\sec x$ gibt $y'=\text{tang}\, x \cdot \sec x$.

4. $y=\text{cosec}\, x = y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\text{cotang}\, x \cdot \text{cosec}\, x$.

Mit den vorstehenden Formeln kann man jeden Ausdruck differentiiren, welcher Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. enthält; man

braucht deshalb nur so zu differentiiren, als seien diese Größen besondere Funktionen, und alsdann statt ihrer Derivirten die obigen Resultate zu setzen. Es mögen jetzt einige Beispiele von der Differentiation der trigonometrischen Funktionen folgen.

1. $y=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)}$ gibt $y'=-\frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}x$, was vorauszusehen war, da $y=\cos\frac{1}{2}x$.

2. $y=\cos mz$ gibt $y'=-mz'\cdot\sin mz$.

3. $y=\sin mz$ . . . $y'=mz'\cdot\cos mz$.

4. $y=\cos(lx)$ . . . $y'=-\frac{\sin(lx)}{x}$.

5. $y=\cos x^{\sin x}$ . . . $y'=\cos x^{\sin x}\left(\cos x\cdot l\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.

6. $y=l\sin z$ . . . . $y'=z'\cot z$.

7. $y=l\cos z$ . . . . $y'=-z'\tan z$.

8. $y=l\tan z$ . . . . $y'=\frac{2z'}{\sin 2z}$.

9. $y=\sqrt[3]{\left(3e^x-\frac{x^2}{\sin x}\right)}$ liefert $y'=\frac{3e^x\sin x-2x+x^2\cot x}{3\sin x\left(3e^x-\frac{x^2}{\sin x}\right)^{\frac{2}{3}}}$

10. $y=e^{\sin x}$ . . . . $y'=e^{\sin x}\cos x$.

§. 29. Wir wollen nun einige von Legendre zuerst angegebene Reihen mittheilen, welche zur Berechnung der Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten sehr förderlich sind.

Suchen wir deshalb die verschiedenen Derivirten von $y=\log\sin x$; wir finden auf diese Art, wenn der Modul durch M dargestellt wird:

$$y'=M\cot x,\ y''=-\frac{M}{\sin^2 x},\ y'''=\frac{2M\cos x}{\sin^3 x}.$$

Hiernach gibt der Taylor'sche Lehrsatz:

$$\log\sin(x+h)=\log\sin x+Mh\cot x-M\frac{h^2\cot x}{\sin 2x}+ \text{etc.}$$

Bringen wir $\log\sin x$ auf die andere Seite und bezeichnen die Differenz zwischen diesem Logarithmen und jenem von $\sin(x+h)$ mit Δ; so kommt

$$\Delta = Mh\cot x\left(1 - \frac{h}{\sin 2x} + \frac{h^2}{3\sin^2 x}\right) + \frac{Mh^4}{4\sin^4 x}\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2 x \ldots\right)$$

Auf ähnliche Weise finden wir für die Differenzen Δ_1 und Δ_2 zwischen den Logarithmen der Cosinus oder Tangenten von $x+h$ und von x folgende Ausdrücke:

$$\Delta_1 = -Mh\,\mathrm{tang}\,x\left(1 + \frac{h}{\sin 2x} + \frac{h^2}{3\cos^2 x}\right) - \frac{Mh^4}{4\cos^4 x}\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2 x\right),$$

$$\Delta_2 = \frac{2Mh}{\sin^2 x}\left(1 - h\cot 2x + \frac{2}{3}h^2 + \frac{4}{3}h^2\cot^2 2x\right)$$
$$+ \frac{4Mh^4\cos 2x}{\sin^4 2x}\left(1 - \frac{\sin^2 2x}{6}\right),$$

wo h die Länge des Zuwachses des Bogens bedeutet.

Um z. B. $\log\sin 27^0 33'$ aus $\log\sin 27^0 30'$ herzuleiten, mache man $h = \mathrm{arc}\,3' = 3\sin 1'$; wonach die Rechnung steht:

h	0,94085—4	0,94085—4	1stes Glied =	0,00072803
M	0,63778—1	0,86215—4	2tes Glied =	—0,00000078
cot x . .	0,28352	—0,91336—1	3tes Glied =	0,
1s Glied	0,86215—4...	2s Gld. 0,88964—7...	Δ	0,0007273

$\log\sin x = 0{,}6644056 - 1$, $\log\sin(x+h) = \log\sin 27^0 33' =$ 0,6651329—1.

Das dritte Glied kommt hier gar nicht in Betracht, wofern man nur 7 Decimalstellen berücksichtigt.

Diese Methode empfiehlt sich vorzugsweise in denjenigen Fällen, wo es gilt, die Logarithmen auf eine große Annäherung hin zu bestimmen.

§. 30. Nachdem wir die Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. als Funktionen des Bogens betrachtet haben, wollen wir jetzt den Bogen als Funktion seines Sinus, Cosinus u. s. w. ansehen und seine Derivirten unter diesen verschiedenen Gesichtspunkten bestimmen. Ist daher x der Reihe nach jede trigonometrische Linie des Bogens y, so wird man haben:

$$\text{für } x = \sin y,\quad y' = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

$$\text{für } x = \cos y,\quad y' = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}};$$

$$\text{für } x = \mathrm{tang}\,y,\quad y' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{für } x = \text{cotang}\, y,\ y' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{für } x = \sec y,\ y' = \frac{1}{x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}:$$

$$\text{für } x = \text{cosec}\, y,\ y' = -\frac{1}{x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}:$$

d. h. die Derivirte des Bogens in Bezug auf den Sinus ist gleich 1, dividirt durch den Cosinus; die des Bogens in Bezug auf den Cosinus ist gleich 1, dividirt durch den Sinus, negativ genommen; die eines Bogens rücksichtlich seiner Tangente ist gleich 1, dividirt durch das Quadrat der Secante; die eines Bogens in Bezug auf die Cotangente gleich 1, dividirt durch das Quadrat der Cosecante, negativ genommen.

In den bisherigen Formeln war der Halbmesser $=1$ angenommen. Es wird aber leicht sein, dieselben auf den Halbmesser $=r$ zurückzuführen, wenn man sich erinnert, daß sowohl die Bogen als auch die trigonometrischen Linien, welche zu einerlei Winkeln in Kreisen von verschiedenen Halbmessern gehören, sich zu einander wie ihre entsprechenden Halbmesser verhalten.

Hiernach hat man für den Halbmesser $=r$:

$$\text{für } y = \sin x, \ldots\ y' = \frac{\sqrt{(r^2-\sin^2 x)}}{r};$$

$$\text{für } y = \text{tang}\, x, \ldots\ y' = \frac{r^2+\text{tang}^2 x}{r^2};$$

$$\text{für } y = \text{arc}(\sin = x),\ y' = \frac{r}{\sqrt{(r^2-x^2)}};$$

$$\text{für } y = \text{arc}(\text{tang} = x),\ y' = \frac{r^2}{r^2+x^2}.$$

Differentiation der unentwickelten Gleichungen.

§. 31. Bis jetzt haben wir nur explicite (entwickelte) Gleichungen differentiirt, d. h. nur solche, worin sich die Veränderliche auf der einen Seite und die Funktion auf der andern Seite allein befand, wie $y=fx$. Jetzt wollen wir von den impliciten (unentwickelten) Gleichungen mit zwei Veränderlichen y, x,

sprechen, d. h. von solchen, in welchen y und x untereinander gemischt stehen. Würde man die beliebige Gleichung $F(x, y) = 0$ in Bezug auf y auflösen, d. h. sie auf die Form $y = fx$ bringen; so wäre es leicht die Derivirten y', y'', y''' ... daraus abzuleiten. Eine solche Auflösung, welche sich selten bewerkstelligen läßt, ist aber nicht durchaus nothwendig. Denn setzten wir in die vorgelegte Gleichung statt y seinen Werth fx, so bekommen wir eine identische Funktion von x, welche durch $z = F(x, fx) = 0$ bezeichnet werden mag, und deren Derivirten z', z'', z''' . . . offenbar Null sein werden (§. 11).

Um nun die Derivirte z' zu erhalten, ist es gut, mit Berücksichtigung dessen, was darüber im §. 18 gesagt worden, den verwickelten Ausdruck $F(x, fx)$ zu vereinfachen, indem man die Gruppe der Glieder in fx durch y repräsentirt, und hierauf die Gleichung $z = F(x, y) = 0$ welche nichts anders als die vorgelegte selbst ist, der in dem eben citirten Paragaphen aufgestellten Regel unterwirft.

Hiernach steht:

$$z' = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot y' = 0, \text{ oder } \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = 0.$$

Die Ausdrücke $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ welche bekannte Funktionen von x und y sind, werden die partiellen Derivirten oder partiellen Differentialcoefficienten genannt, während die Ausdrücke $\frac{dz}{dx} dx$, $\frac{dz}{dy} dy$ die partiellen Differentiale heißen.

Die Derivirten z', z'', z''' . . . werden wir vorzugsweise Differentialgleichungen nennen, und zwar von der ersten, zweiten, dritten Ordnung u. s. w.

Beispiele: 1. $y^2 + x^2 - r^2 = 0 = z$ gibt

$$\frac{dz}{dx} = 2x, \ \frac{dz}{dy} = 2y, \ x + yy' = 0, \ y' = -\frac{x}{y}.$$

2. $y^2 - 2bxy + x^2 - a^2 = 0$ liefert

$$(y - bx)y' - by + x = 0.$$

3. Aus $x^4 + 2ax^2y = ay^3$ entspringt

$$(2ax^2 - 3ay^2)y' + 4x^3 + 4axy = 0.$$

4. Für $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ kommt

$$y^2y' - axy' - ay + x^2 = 0.$$

§. 32. Es wird hier y' durch x und y bestimmt, und nicht durch x allein, wie man dies gefunden hätte, wenn die Gleichung $F(x, y)=0$ vorerst in Bezug auf y aufgelöst worden wäre. Um y' in x allein auszudrücken, muß man y zwischen der Gleichung $z=0$ und ihrer Differentialgleichung $z'=0$ eliminiren. Auf diese Art haben wir in unserm ersten Beispiele die Gleichungen:

$$x^2+y^2=r^2,\ x+yy'=0,$$

aus welchen durch Elimination von y entsteht:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

Durch diese Elimination, welche selten von Nutzen ist, erscheint y' auf demselben Grade, auf dem y in der vorgelegten Gleichung $z=0$ vorkommt; denn die Derivirte y' wird immer so viel Werthe haben als deren die Funktion $y=fx$ zuläßt, weil die Differentialrechnung für y' die nämlichen Radikalzeichen mit sich bringt, welche sich in fx vorfinden. Wenn y' in der Differentialgleichung $z'=0$ nur auf der ersten Potenz erscheint, so rührt dies daher, daß darin auch y vorkommt, welches die nämlichen, durch die Elimination von y wieder zum Vorschein kommenden Wurzelausdrücke mit sich führt.

Anmerkung. Um das hier Gesagte noch mehr aufzuhellen, wollen wir unser zweites obiges Beispiel vornehmen. Damit die Derivirte y' in x allein ausgedrückt werde, müssen wir in dem Ausdrucke $y'=\frac{by-x}{y-bx}$ für y dessen Werth, nämlich $bx\pm\sqrt{(a^2-x^2+b^2x^2)}$ substituiren, wodurch wir bekommen:

$$y'=b\pm\frac{b^2x-x}{\sqrt{(a^2-x^2+b^2x^2)}},$$

welches Resultat mit demjenigen übereinstimmt, das aus der durch Auflösung entstandenen Gleichung $y=bx\pm\sqrt{(a^2-x^2+b^2x^2)}$ durch unmittelbare Differentiation sich ergibt.

Sucht man hingegen den Werth von y aus dem Ausdrucke $y'=\frac{by-x}{y-bx}$, um ihn in die gegebene Gleichung $y^2-2bxy+x^2-a^2=0$ zu substituiren; so erhält man nach geschehener Reduktion folgende Gleichung:

$$y'^2 - 2by' + \frac{x^2 - b^2x^2 - a^2b^2}{x^2 - a^2 - b^2x^2} = 0,$$

aus welcher für y' die zwei Werthe, wie oben, sich ergeben.

§. 33. Die Gleichung $z'=0$ enthält außer x noch y und y', welche beide Funktionen von x sind. Dem im vorletzten Paragraphen angewendeten Raisonnement zufolge kann man diese Gleichung von Neuem differentiiren, indem man y und y' als Funktionen von x ansieht und die im §. 18 aufgestellte Regel beobachtet, um zur Gleichung $z''=0$ zu gelangen. Hierbei wird unsere bisher übliche Bezeichnungsart eine weitere Ausdehnung erhalten und unter dergleichen Ausdrücken, wie $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^3z}{dx^2\,dy}$ . . . Folgendes zu verstehen sein:

Der erste deutet zwei nacheinander zu vollziehende Differentiationen an, wovon die erste sich blos auf die Veränderliche x und die zweite sich blos auf die Veränderliche y bezieht; während der andere Ausdruck eine dreimalige Differentiation angibt, wobei zweimal x als veränderlich und einmal nur y als veränderlich betrachtet wurde. Uebrigens geht aus dem, was im §. 18. gesagt worden, hervor, daß es gleichgültig ist, in welcher Ordnung man diese Differentiationen vornimmt. So z. B. kann man im zweiten Falle zuerst in Bezug auf y, dann zweimal in Bezug auf x, oder auch einmal in Bezug auf x, hierauf in Bezug auf y und endlich in Bezug auf x differentiiren. Hiernach liefert die Differentialgleichung von der ersten Ordnung $z'=0$ folgende Differentialgleichung von der zweiten Ordnung:

$$z'' = \frac{d^2z}{dx^2} + 2y'\frac{d^2z}{dx \cdot dy} + \frac{dz}{dy}y'' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 = 0,$$

welche die Relation ausdrückt, die zwischen x, y, y' und y'' stattfindet. Man kann daraus y' mittelst der Gleichung $z'=0$, und wenn man will y mittelst der primitiven Gleichung $z=0$ eliminiren, wodurch man y'' auf einem höhern Grad bekommt. Fährt man so fort zu differentiiren, so erhält man die Differentialgleichung, wovon y''' abhängt, u. s. w.

Die erste Differentialgleichung unsers dritten Beispiels, nämlich:

$$(2ax^2 - 3ay^2)y' + 4x^3 + 4axy = 0$$

gibt uns so, wenn wir differentiiren, wofern y, y' als Funktionen von x angesehen werden:

$$(2ax^2-3ay^2)y''+12x^2+4ay+8axy'-6ayy'^2=0.$$

Ebenso gibt die erste Differentialgleichung unsers vierten Beispiels, nämlich $y^2y'-axy'-ay+x^2=0$, als Differentialgleichung von der zweiten Ordnung:

$$(y^2-ax)y''+2yy'^2-2ay'+2x=0.$$

Substituirt man für y' seinen Werth $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, so erhält man, nach geschehener Reduktion und mit Berücksichtigung der gegebenen Gleichung folgendes Resultat:

$$(y^2-ax)^3y''+2a^3xy=0,$$

welches den Werth von y'' in x und y ausdrückt. Vermittelst der vorgelegten Gleichung läßt sich y wegschaffen.

§. 34. Wenn die vorgelegte Gleichung $z=0$ ein constantes Glied enthält, so fällt, wie schon im §. 9 erwähnt wurde, dasselbe durch die Differentiation weg. Ist z. B. $x^2+y^2=r^2$, so ist die daraus gewonnene Differentialgleichung $x+yy'=0$ von der constanten Größe r unabhängig, und drückt eine, sämmtlichen Kreisen, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, gemeinsame Eigenschaft aus. Uebrigens ist es erlaubt, auch irgend eine andere Constante wegzuschaffen; man braucht deshalb nur aus der gegebenen $z=0$ und der daraus hergeleiteten Differentialgleichung $z'=0$ jene Constante zu eliminiren. So folgt z. B. aus den Gleichungen $y=ax+b$ und $y'=a$, welche letztere kein b mehr enthält, wenn man a eliminirt, die Differentialgleichung $y=y'x+b$, welche für jeden Werth von a stattfindet.

Ueberhaupt kann man jede beliebige Anzahl von Constanten aus der gegebenen Gleichung wegschaffen; man braucht deshalb nur eben so viele Differentiationen vorzunehmen, als Constanten wegfallen sollen. Ist z. B. $y^2=a-bx^2$ die vorgelegte Gleichung, so erhält man nach der ersten Differentiation: $yy'=-bx$, und nach der zweiten Differentiation: $yy''+y'^2=-b$. Durch die Elimination von b aus den beiden letztern Gleichungen entspringt die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$yy'=(yy''+y'^2)x,$$

die eine der vorgelegten Gleichung angehörige Eigenschaft ausdrückt, welche Werthe die Constanten a und b auch haben mögen.

Man kann eine Constante c auch durch bloße Differentiation wegschaffen, wenn man nämlich die vorgelegte Gleichung $z=0$ vorher in Bezug auf c auflöst, d. h. sie auf die Form $c=f(x, y)$ bringt. Da beide Methoden zu gleichgeltenden Resultaten führen müssen, die zweite aber Wurzelzeichen mit sich bringt, welche von dem Grade der zu eliminirenden Constante c abhängig sind; so ist es einleuchtend, daß das durch die Elimination von c zwischen $z=0$ und $z'=0$ gewonnene Resultat höhere Potenzen von y' enthalten wird.

Es sei z. B. die Gleichung $y^2-2cy+x^2=c^2$; aus ihr entspringt die Differentialgleichung $(y-c)y'+x=0$. Wird der Werth von c aus der letztern genommen und in die erste eingeführt, so kommt die Differentialgleichung:

$$(x^2-2y^2)y'^2-4xyy'-x^2=0.$$

§. 35. Hieraus sieht man, daß in jeder aus der primitiven Gleichung $z=F(x, y)=0$ hergeleiteten Differentialgleichung von der nten Ordnung die Derivirte $y^{(n)}$ nur auf der ersten Potenz vorkommen kann; und daß, wenn die Sache sich anders verhält, die fragliche Gleichung nicht durch unmittelbare Differentiation entstanden ist, sondern dadurch, daß irgend eine Constante, oder x oder y aus der vorgelegten und der daraus hergeleiteten Differentialgleichung eliminirt worden ist.

Anmerkung. Aus dem hier Vorgetragenen ersehen wir, daß man zu den Differentialgleichungen, welche eine allgemeinere Bedeutung haben, als die ihnen zum Grunde liegenden primitiven, auf zweierlei Art gelangen kann. Einmal durch unmittelbare Differentiation der primitiven, solche Resultate sollen unmittelbare Differentialgleichungen heißen; zweitens durch die Elimination einer Constanten zwischen der primitiven und ihrer Differentialgleichung, dergleichen Resultate wollen wir mittelbare Differentialgleichungen nennen. Es sei z. B. die primitive Gleichung: $ax-by=xy$. Die unmittelbare Differentialgleichung ist: $a-by'=xy'+y$. Durch die aus beiden Gleichungen nacheinander vorgenommene Elimination

von a und b, bekommt man die beiden mittelbaren Differentialgleichungen:

$$by = x^2y' + bxy' \text{ und } ay - y^2 = axy';$$

Eliminirt aus jeder dieser Gleichungen und ihrem Differential die darin vorkommende Constante, so erhält man die Gleichung:

$$-2yy' + 2xy'^2 = xyy'',$$

welche die mittelbare Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der primitiven $ax - by = xy$ ist.

Die primitive Gleichung mit zwei Constanten enthält also zwei mittelbare Differentialgleichungen der ersten und eine der zweiten Ordnung.

Auf dieselbe Weise hat eine primitive Gleichung mit drei Constanten drei verschiedene mittelbare Differentialgleichungen der ersten Ordnung, von denen jede zwei Constanten enthält, ferner drei verschiedene mittelbare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, von denen jede eine Constante enthält, und endlich eine mittelbare Differentialgleichung der dritten Ordnung, welche von den Constanten unabhängig ist.

Ueberhaupt wird die Anzahl der verschiedenen Ordnungen einer primitiven Gleichung mit n Constanten, nacheinander durch die Binomialcoefficienten der nten Potenz angegeben.

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

§. 36. Jede allgemeine, mittelst der Differentialrechnung behandelte Aufgabe führt uns auf einen Ausdruck in x, y, y', y'' .... von der Form:

$$\psi[x, y, (y'), (y'') \ldots].$$

Will man denselben jetzt auf ein specielles Beispiel $y = Fx$ anwenden, so muß man die Derivirten (y'), (y'') ... daraus ableiten und ihre Werthe in ψ substituiren, wodurch sich letzteres als bloße Funktion von x herausstellen wird. Die hier gebrauchten Klammern () sollen dazu dienen, um anzudeuten, daß x als unabhängige Veränderliche angesehen ist und einen Zuwachs h erhalten hat.

Nun kann es sich aber ereignen, daß statt der Gleichung $y=Fx$ zwei andere Gleichungen:

$$y=\varphi t,\ x=ft \ldots (a)$$

gegeben sind, welche y und x mit einer dritten Veränderlichen t in Verbindung setzen.

In solchem Falle müßte man die Größe t zwischen den beiden Gleichungen (a) eliminiren, um zu dem Resultat $y=Fx$ zu gelangen, worauf die aus demselben abgeleiteten Derivirten (y'), (y'') ... in den analytischen Ausdruck ψ einzuführen wären. Diese gewöhnlich langwierige, zuweilen selbst unausführbare Rechnung ist jedoch nichts weniger als nothwendig, indem es hinreichend ist, mittelst der Gleichungen (a) und ihrer Differentiale den Ausdruck ψ dergestalt umzuformen, daß darin nicht mehr x, sondern t als unabhängige Veränderliche erscheint. Die Frage ist daher, auf welche Weise die Funktion ψ modificirt werden müsse, damit in ihr statt der Ausdrücke

$$x,\ y,\ (y') \text{ oder } \frac{dy}{dx},\ (y'') \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \text{ die Ausdrücke}$$

$$t,\ x' \text{ oder } \frac{dx}{dt},\ y' \text{ oder } \frac{dy}{dt},\ x'' \text{ oder } \frac{d^2x}{dt^2},\ y'' \text{ oder } \frac{d^2y}{dt^2} \ldots$$

vorkommen, welche sich auf die unabhängige Veränderliche t beziehen und bekannte Funktionen davon sind.

Es seien deshalb h, k, i die gleichzeitigen Zuwachse der Veränderlichen x, y und t.

$$y=Fx \text{ gibt dann } k=(y')h+\tfrac{1}{2}(y'')h^2+\ldots (1),$$
$$y=\varphi t \ldots\ldots k=y'i+\tfrac{1}{2}y''i^2+\ldots (2),$$
$$x=ft \ldots\ldots h=x'i+\tfrac{1}{2}x''i^2+\ldots (3),$$

Durch Gleichsetzung der Werthe von k und Einführung der Reihe (3) statt h, erhält man, wenn man bei den zwei ersten Potenzen von h stehen bleibt:

$$(y')x'i+[(y')x''+(y'')x'^2]\tfrac{1}{2}i^2 \ldots = y'i+\tfrac{1}{2}y''i^2 \ldots;$$

woraus, wegen der Willkürlichkeit von i, entspringt:

$$(y')x'=y',\ (y')x''+(y'')x'^2=y'',\ \text{u. s. w.}$$

Um folglich die Größe ψ durch t allein auszudrücken, muß man

darin statt x, y, (y'), (y'') . . . die Ausdrücke einführen, welche sich respektiv aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$x = ft,\ y = \varphi t,$$
$$(y') = \frac{y'}{x'},\ (y'') = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \quad \ldots \text{(D)}.$$

Uebrigens lassen sich die Dervirten der höhern Ordnungen (y''), (y''') . . . aus dem Werthe der ersten

$$(y') = \frac{y'}{x'} = \frac{\varphi' t}{f' t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

welcher nichts anders als der Quotient der aus den Gleichungen (a) gewonnenen Derivirten ist, herleiten. Denn (y') stellt eine Funktion von x, von der Form $F'x$, dar, welche ihrerseits wieder als eine Funktion von t, von der Form φ, t, angesehen werden kann, weil $x = ft$.

Indem man jetzt mit diesen drei Gleichungen dasselbe Raisonnement anstellt, folgert man, daß die Derivirte (y'') der Quotient der in Bezug auf t genommenen Derivirten φ, t und ft sein muß. Die Derivirte von

$$\varphi, t = \frac{y'}{x'} \text{ ist aber } \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2};$$

woraus, wenn man durch x' die Derivirte von ft dividirt, der oben gefundene Ausdruck (D) wieder zum Vorschein kommt. Auf gleiche Weise erhält man, wenn man die Derivirte dieses Werthes von (y'') nimmt und durch x' dividirt:

$$(y''') = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{3x''y''}{x'^4} - y'\left(\frac{x'''}{x'^4} - \frac{3x''^2}{x'^5}\right) \quad \ldots \text{(E); u. s. w.}$$

Hiernach stellen sich bei dem Gebrauch des analytischen Ausdrucks ψ drei verschiedene Verfahrungsweisen heraus:

1. Man eliminirt t zwischen den Gleichungen (a), sucht dann aus der dadurch entstandenen Gleichung $y = Fx$ die Derivirten (y'), (y'') . . . , und führt sie endlich in ψ ein.

2. Man substituirt in ψ für (y'), (y'') . . . ihre Werthe (D), (E) . . . , wodurch ψ in x, y, y', y'' . . . , mithin auch in

t ausgedrückt wird, wenn man die Gleichungen (a) und ihre Differentiale zu Hülfe nimmt.

3. Man betrachtet den Bruch $(y') = \frac{y'}{x'}$ als eine Funktion von t, differentiirt mithin in Bezug auf t, indem man bei jeder Differentiation durch x' oder $f't$ dividirt, und substituirt endlich in ψ die auf solche Art für (y'), (y'') . . . gefundenen Werthe.

§. 37. Es sei u eine gegebene Funktion von t, nämlich $u = ft$; ferner seien die Gleichungen (a) hier $x = u \cos t$, $y = u \sin t$.

Die in Bezug auf t vorgenommenen Differentiationen geben:

$$x' = u' \cos t - u \sin t, \quad y' = u' \sin t + u \cos t;$$

$x'' = u'' \cos t - 2u' \sin t - u \cos t$, $y'' = u'' \sin t + 2u' \cos t - u \sin t$; u. s. w.

Substituirt man vorerst in ψ die Werthe (D), wodurch statt der Derivirten (y'), (y'') . . . die Derivirten y', x', y'' . . . eingeführt werden, ferner für die letztern die obenstehenden Größen; so erhält unser Ausdruck ψ nur noch t, u, u', u'' . . . , welche lauter bekannte Funktionen von t sind, wenn man die Gleichung $u = ft$ in Erwägung zieht.

Beispiele: 1. Es sei $\psi = \frac{x(y') - y}{y(y') + x}$. Es entsteht daraus, wenn man den Werth (D) von (y') einführt:

$$\psi = \frac{y'x - x'y}{yy' + xx'}.$$

Die obigen Werthe von x', y' geben aber

$y'x - x'y = u^2$, $yy' + xx' = uu'$; man hat daher $\psi = \frac{u}{u'}$.

2. Es sei $$\psi = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{(y'')}.$$

Mit Berücksichtigung der Formeln (D) entspringt daraus:

$$\psi = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$ Es ist aber

$x'^2 + y'^2 = u^2 + u'^2$, $x'y'' - y'x'' = u^2 + 2u'^2 - uu''$; folglich

$$\psi = \frac{(u'^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2 + 2u'^2 - uu''}.$$

Der Ausdruck ψ ist demnach für jeden Werth von t bekannt, sobald die Gleichung $u = ft$ gegeben ist.

Anmerkung. Die Gleichungen $x = u \cos t$, $y = u \sin t$ dienen dazu, um die rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten auszudrücken. Hat man daher eine Differentialgleichung für das erste System gefunden, so läßt sich dieselbe mit Hülfe der hier gegebenen Rechnung auf das zweite übertragen. So drückt z. B. im ersten Exempel ψ die Tangente des Winkels aus, welchen der Leitstrahl mit der Berührungslinie einer beliebigen Curve bildet; während im zweiten ψ den Krümmungshalbmesser einer Curve darstellt. Die fraglichen Ausdrücke wären, unserer Rechnung gemäß, hiernach für Polarcoordinaten umgewandelt.

§. 38. In dem auf solche Weise umgeformten Ausdrucke ψ ist t die unabhängige Veränderliche. Will man x in seinen ursprünglichen Zustand wieder zurückführen, so braucht man nur $x' = 1$ zu setzen, woraus $x'' = x''' = \ldots 0$: denn y' verwandelt sich dann in (y'), mithin auch y'' in (y'') u. s. w., was sich an unsern Beispielen leicht nachweisen läßt. Ist nun der analytische Ausdruck ψ unter diesen allgemeinen Gesichtspunkt gebracht worden, wonach er für jede unabhängige Veränderliche t paßt; so trägt er keine weitern Spuren jener frühern Annahme mehr an sich, der gemäß x als unabhängige Veränderliche galt: man könnte ihn daher, als aus irgend einer andern Funktion abstammend, betrachten, worin eine andere Veränderliche u die unabhängige wäre. Macht man nun $x' = 1$, so sagt man damit, daß x die unabhängige Veränderliche ist. $t' = 1$ wird folglich das Nämliche für t festsetzen, so daß diese Gleichüng die Bedingung ausdrückt, welche die Größe zur unabhängigen Veränderlichen macht; die zweite und daher auch alle höheren Derivirten von t werden dann gleich Null sein, oder was dasselbe heißt, man betrachtet das erste Differential von t als eine constante Größe. Ist mithin der Ausdruck ψ unter den allgemeinsten Gesichtspunkt gestellt worden, für welchen er auf jede beliebige Größe als unabhängige Veränderliche bezogen werden kann; so wird darin kein Differential mehr constant sein.

Kehrt man zu der Entwicklung (3) von h zurück, welcher die

Gleichung $x = ft$ zum Grunde liegt; so sieht man, daß man unter der Gleichung $\frac{dx}{dt} = x' = 1$ nichts anders zu verstehen hat, als daß das Differential von x in Bezug auf eine beliebige Veränderliche t constant ist. Ebenso wird die Gleichung $t' = 1$, wodurch t zur unabhängigen Veränderlichen wird, nichts anders aussagen, als daß das Differential von t in Bezug auf eine andere Veränderliche u constant ist.

§. 39. Wir gehen jetzt zur Anwendung dieses Satzes über. Enthält der Ausdruck ψ zufälligerweise kein x mehr, hat derselbe mithin die Form $\psi = [y, (y'), (y'') \ldots]$; so braucht man nicht mehr die ursprüngliche Gleichung $x = ft$, sondern nur die Differentialgleichung $x' = f't$ zu kennen: denn die Relationen (D) führen in ψ kein x, sondern bloß die Größen x', y' ... ein, wonach die in Frage stehenden Rechnungen nicht die geringste Schwierigkeit haben.

Wäre aber in der vorgelegten Differentialgleichung nicht x, sondern t die abhängige Veränderliche, hätte man mithin z. B. $F(t, t', x) = 0$; so müßte man vorerst diese Gleichung unter einen allgemeinen Gesichtspunkt stellen, in der Art, daß darin kein constantes Differential vorkäme. Man bewerkstelligt dies dadurch, daß man $\frac{t'}{x'}$ für x' schreibt, hierauf $t' = 1$ setzt, was t zur unabhängigen Veränderlichen macht; oder kürzer, daß man sofort $\frac{1}{x'}$ statt t' anschreibt.

Beispiele: 1. Es seien die Gleichungen (a) z. B. $y = \varphi t$, $y = t'$, wo die Differentiale sich auf x beziehen. Sollen sie auf t bezogen werden, so muß man $y = \frac{1}{x'}$ setzen; woraus

$$x' = \frac{1}{y}, \quad x'' = -\frac{y'}{y^2} \text{ u. s. w.}$$

Diese Werthe werden dann in den mittelst der Relationen (D) umgeformten Ausdruck ψ eingeführt, wodurch er in t und in den darauf Bezug habenden Derivirten ausgedrückt sein wird, wenn kein x darin vorkommt. Für

$$\psi = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{(y'')} \text{ erhält man vorerst:}$$

$$\psi = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}; \text{ ferner}$$

$$\psi = \frac{(1+y^2y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y(yy''+y'^2)}.$$

Unser ψ wäre hiernach durch t ausgedrückt, weil die Derivirten y', y'' in Bezug auf t aus der Gleichung $y=\varphi t$ hergeleitet werden können; für jeden Werth von t ist folglich ψ bekannt.

Anmerkung. Dieser Werth von ψ entspricht jenem des Krümmungshalbmessers einer beliebigen Curve; wenn man das Differential des Flächenstückes als constant ansieht.

2. Es seien die Gleichungen (a) jetzt $y=\varphi t$, $t'^2=1+(y')^2$, wo die Differentiale sich auf x beziehen. Sollen sie auf die unabhängige Veränderliche t übertragen werden, so verwandelt sich die zweite Gleichung in: $x'^2+y'^2=1$; woraus durch Differentiation $x'x''+y'y''=0$. Unser verallgemeinerter Ausdruck ψ geht hiernach in $\psi=\frac{x'}{y''}$ oder in $\psi=-\frac{y'}{x''}$ über, je nachdem x'' oder y'' daraus eliminirt worden.

Um ψ durch t allein dargestellt zu erhalten, braucht man blos die Derivirte y', y'' aus der Gleichung $y=\varphi t$ herzuleiten, dabei $x'=\sqrt{(1-y'^2)}$ zu setzen, und die Substitution in $\psi=\frac{x'}{y''}$ auszuführen. Wäre statt $y=\varphi t$ die Gleichung $x=ft$ gegeben, so würde man mit dem zweiten Werthe von ψ auf dieselbe Art verfahren.

Anmerkung. Der hier aufgestellte Werth von ψ ist der des Krümmungshalbmessers einer Curve, wenn man das Differential des Bogens als constant betrachtet.

3. Es sei $\psi=\frac{(y''')}{x(y'')}$, wo x die unabhängige Veränderliche ist. Will man diesen Ausdruck auf die Veränderliche t beziehen, und dabei wieder $t'^2=1+(y')^2$ annehmen; so bekommt man vorerst mittelst der Formeln (D) und (E), nachdem oben und unten mit x'^5 multiplizirt worden:

$$\psi = \frac{y'''x'^2-3x'x''y''-y'x'x'''+3y'x''^2}{xx'^2(x'y''-y'x'')}.$$

Aus $x'^2+y'^2=1$ entspringt:

$$x'x''+y'y''=0,\ x'x'''+x''^2+y'y'''+y''^2=0.$$

Eliminirt man aus dieser letztern x'', ferner y'^2 mit Hülfe der beiden vorhergehenden; so erhält man:

$$x'''=-\frac{y'y'''}{x'}-\frac{y''^2}{x'^3}.$$

Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck ψ endlich in:

$$\psi=\frac{y'''}{xx'y''}+\frac{4y'y''}{xx'^3}.$$

4. Es seien die Gleichungen (a) endlich:

$$x^2+xy+y^2=0,\ t'^2=1+(y')^2.$$

Die erste zweimal differentiirt, wenn kein Differential constant angenommen wird, gibt:

$$(2x+y)x'+(2y+x)y'=0\ \ldots\ (1);$$

$$2x'^2+2x'y'+2y'^2+(2x+y)x''+(2y+x)y''=0\ \ldots\ (2).$$

Wird das Differential von t constant vorausgesetzt, so hat man

$$x'^2+y'^2=1\ \ldots\ (3),\ \text{woraus}$$

$$x'x''+y'y''=0\ \ldots\ (4).$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (3) entspringt:

$$x'=-\frac{2y+x}{\sqrt{(5y^2+8xy+5x^2)}};\ y'=\frac{2x+y}{\sqrt{(5y^2+8xy+5x^2)}}.$$

Mittelst der Relation (4) geht die Gleichung (2) in:

$$2x'^2+2x'y'+2y'^2-(2x+y)\frac{y'y''}{x'}+(2y+x)y''=0 \text{ über.}$$

Hieraus erhält man:

$$y''=\frac{2x'^3+2x'^2y'+2y'^2x'}{(2x+y)y'-(2y+x)x'};$$

$$x''=-\frac{2x'^2y'+2x'y'^2+2y'^3}{(2x+y)y'-(2y+x)x'}.$$

Es wären folglich die Derivirten x', y', x'', y'' in Bezug auf t in Funktionen von x und y dargestellt, obschon man nur eine Relation zwischen dem Differential dieser Veränderlichen und denen jener Funktionen kennt.

§. 40. Mittelst dieser Principien läßt sich die Richtigkeit mehrerer Differentiationsregeln sehr leicht nachweisen. Auch kann man, wenn die Gleichung $y=fx$ und ihre Derivirten (y'), (y'') bekannt sind, wo y als Funktion von x angesehen wird, die Derivirten für den Fall $x=\varphi y$ finden, wo mithin x als Funktion von y betrachtet wird, ohne deshalb zur Auflösung der erstern Gleichung zu schreiten. Man braucht zu diesem Behuf in den Relationen (D) blos

$$y'=1,\ y''=y'''=\ldots=0 \text{ zu machen, d. h.}$$

$$(y')=\frac{1}{x'},\ (y'')=-\frac{x''}{x'^3}\ldots \text{ zu setzen.}$$

Anmerkung. Es läßt sich dies übrigens auch direkt auf folgende Weise darthun. Es seien k und h die gleichzeitigen Zuwachse von y und x.

$$y=fx \text{ gibt } k=y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+ \text{ rc.},$$

$$x=\varphi y\ \ .\ \ .\ \ h=x'k+\tfrac{1}{2}x''k^2+ \text{ rc.};$$

hieraus, wenn man den Werth von k in jenen von h substituirt:

$$h=x'y'h+(x'y''+x''y'^2)\tfrac{1}{2}h^2+, \text{ u. s. w.}$$

Daraus zieht man:

$$1=x'y',\ x'y''+x''y'^2=0, \text{ u. s. w.};$$

aus welchen Gleichungen die obigen Werthe von y', y'' ... sich ergeben.

Beispiele: 1. Der Ausdruck $\psi=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{(y'')}$ verwandelt sich in dem Fall, wo x als Funktion von y angesehen wird, in folgenden:

$$\psi=\frac{\left(1+\frac{1}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-x''}{x'^3}}=-\frac{(x'^2+1)^{\frac{3}{2}}}{x''}.$$

2. $y=a^x$ gibt $(y')=ka^x$. Hieraus $\frac{1}{x'}=k\,a^x=k\,y$; folglich $x'=\frac{1}{ky}$, wo x als Funktion von y angesehen wird. Es wäre demnach die Derivirte von $x=\operatorname{Log} y$ gefunden.

3. $y = \sin x$ liefert $(y') = \cos x$; daraus folgt $\frac{1}{x'} = \cos x$; ferner $x' = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$, als Derivirte der Gleichung $x = \text{arc}(\sin = y)$.

4. Für die Gleichung $y = \text{tang}\, x$ hat man $(y') = \frac{1}{\cos^2 x}$. Daraus entsteht $x' = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$ als Derivirte von $x = \text{arc}(\text{tang} = y)$.

§. 41. Um einen Differentialausdruck ψ von der ersten Ordnung zu verallgemeinern, muß man

$$(y') \text{ mit } \frac{y'}{x'}, \text{ oder } \frac{dy}{dx} \text{ mit } \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ oder } \frac{dy}{dx} \text{ mit } \frac{dy}{dx} \text{ vertauschen,}$$

indem man den gemeinsamen Divisor dt wegläßt, wobei in dem letztern Falle jedoch nicht zu vergessen ist, daß dx und dy im letzteren Falle die Differentiale in Bezug auf die unabhängige Veränderliche t darstellen. Ein Differentialausdruck ψ der ersten Ordnung erleidet also keine Veränderung, insofern er nach der Leibnitz'schen Bezeichnungsart geschrieben ist, wenn die Unabhängigkeit von einer Veränderlichen x auf eine andere t übertragen wird; nur müssen die darin vorkommenden Differentiale dx, dy ... auf diese neue Veränderliche bezogen werden. Wegen dieser Beziehung ist die Leibnitz'sche Schreibart in der Integralrechnung, wo es sich darum handelt, von der Derivirten auf die ursprüngliche Funktion zurückzugehen, wie überhaupt in jeder Operation, wo es auf eine Verwechslung der unabhängigen Veränderlichen abgesehen ist, von großer Bequemlichkeit.

Beispiele: 1. Für $y = \sin z$ hat man $y' = \cos z \cdot z'$, was mit $dy = \cos z\, dz$ einerlei ist. Daraus entspringt:

$$dz = \frac{dy}{\cos z} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Diese Rechnung, um die Derivirte von $z = \text{arc}\ (\sin = y)$ zu gewinnen, ist kürzer als diejenige, welche wir im vorhergehenden Paragraphen angewandt haben.

2 Für $y=a^z$ hat man $y'=ka^z z'$, was mit $dy=ka^z dz$ übereinstimmend ist. Aus dieser letztern Gleichung folgt $dz=\frac{dy}{ky}$, d. h. das Differential von $z=\mathrm{Log}\,y$.

Der hier erwähnte Vortheil findet jedoch nicht mehr für die Differentialausdrücke der zweiten Ordnung statt; denn die zweite Formel (D) verwandelt sich dann in

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}.$$

wo die Differentiale auf eine dritte Veränderliche t bezogen werden, von der x und y gegebene Funktionen sind. Aus den Principien, von welchen wir ausgegangen sind, folgt unmittelbar, daß das erste Glied der letztern Formel nichts anders als die Derivirte von $\frac{dy}{dx}$ ist, welche hierauf durch dx dividirt worden. Man kann daher, wenn dy und dx als Funktionen von t angesehen werden, setzen:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx}\ldots,$$

so daß sich die Relationen (D), (E) ... sehr leicht wieder finden lassen.

Fälle, wo die Taylor'sche Formel unbrauchbar wird.

§. 42. Die Taylor'sche Reihe (A) (§. 6); welche den veränderten Zustand einer Funktion $y=fx$ ausdrückt, deren Veränderliche x einen Zuwachs h bekommen hat, wird nur ganze Potenzen von h enthalten. Werden der Veränderlichen x besondere Werthe a beigelegt, so kann es geschehen, wenn x unter einem Wurzelzeichen vorkommt, daß, bei der Substitution von $a+h$ für x, die Entwicklung von $f(a+h)$ Bruchexponenten des Zuwachses h enthält, weil die unter jenem Wurzelzeichen befindlichen constanten Größen verschwunden sind. Auch kann unter Umständen die Entwicklung von $f(a+h)$, worin keine weitere Veränderliche als h vorkommt, nach ganzen und positiven Exponenten von h rein unmöglich sein. So z. B. enthalten die Ausdrücke $\cot h$, $\log h$... negative Potenzen von h, weil sie für $h=0$ unendlich werden.

Beispiele: 1. Es sei $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{[(x-a)^4]}$. Für $x=a+h$ hat man:

$$Y=\sqrt{(a+h)}+\sqrt[3]{h^4}=\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}+h^{\frac{4}{3}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}\cdots$$

2. $y=\frac{1}{(x-a)^2}+\sqrt{x}$ gibt für $x=a+h$ den Werth:

$$Y=\frac{1}{h^2}+\sqrt{(a+h)}=h^{-2}+\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}+ \text{ꝛc.}$$

3. $y=\frac{1}{\sqrt{(x-a)}}+\sqrt{x}$ verwandelt sich für $x=a+h$ in:

$$Y=h^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}\cdots$$

4. $y=\sqrt{(x^2-a^2)}$ gibt, wenn man $x=a+h$ setzt:

$$Y=(2a)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}+ \text{ꝛc.}$$

Aus diesen Beispielen sehen wir, daß die Taylor'sche Formel, welche jederzeit ihre Gültigkeit behält, so lang x allgemein gedacht wird, für specielle Werthe von x zufälligerweise unzuläßig sein kann: die Frage ist daher, an welchem Merkmal sich ein solcher Umstand zu erkennen gibt, und was man dann zu thun habe, um die wahre Entwicklung von $f(a+h)$ aufzufinden.

Anmerkung. Die Taylor'sche Formel wurde in den besondern Fällen, für welche sie sich nicht anwenden läßt, mangelhaft genannt. Sie ist jedoch nichts weniger als dies, würde vielmehr es gerade sein, wenn sie nicht durch irgend einen Umstand die vorhandene Ausnahme von der in der Formel ausgesprochenen Regel offenbarte.

§. 43. Es sei allgemein:

$$f(a+h)=A+Bh+Ch^2\ldots+Lh^l+Mh^m\ldots,$$

wo m den zwischen den Ganzen l und $l+1$ liegenden, kleinsten Bruchexponenten darstellt und A, B, C ... endliche Größen sind. Wäre m negativ, so würde Mh^m das erste Glied der Reihe sein.

Differentiirt man unsere Gleichung in Bezug auf h, welche für jeden Werth von h besteht; so hat man:

$$f'(a+h)=B+2Ch+3Dh^2\ldots+lLh^{l-1}+mMh^{m-1}\ldots,$$
$$f''(a+h)=2C+2\cdot3Dh\ldots+l(l-1)Lh^{l-2}+m(m-1)Mh^{m-2}\ldots,$$
$$f'''(a+h)=2\cdot3D\ldots+l(l-1)(l-2)Lh^{l-3}+m(m-1)(m-2)Mh^{m-3}\ldots,$$

u. s. w.

Macht man nun in diesen Ausdrücken $h=0$, so findet man:

$$A=fa,\ B=f'a,\ C=\tfrac{1}{2}f''a,\ D=\tfrac{1}{6}f'''a\ldots;$$

woraus hervorgeht, daß die Coefficienten $A, B \ldots L$ nichts anders als diejenigen Werthe sind, welche fx und ihre Derivirten, bis einschlüssig zu jener der $l$ten Ordnung, für $x=a$ annehmen, genau so wie bei der Taylor'schen Reihe. Bei jeder Differentiation verschwindet das erste Glied, weil es constant ist, so daß bei der $l$ten der Coefficient L im ersten erscheint und bei der $(l+1)$ten kommt:

$$f^{(l+1)}(a+h)=m(m-1)\ldots Mh^{m-l-1}+\ldots$$

Dies erste Glied hat, wegen des Bruches $m<l+1$, einen negativen Exponenten und man erhält für $h=0$ die Derivirte $f^{(l+1)}a=\infty$. Ebenso werden die auf $y^{(l+1)}$ folgenden Derivirten unendlich, weil der Exponent stets negativ bleibt.

Hieraus ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1. Die Taylor'sche Reihe ist jederzeit anwendbar, wenn für den Werth $x=a$ keine der Funktionen $y, y', y'', \ldots$ unendlich wird.

2. Macht der Werth $x=a$ eine dieser Funktionen unendlich, so sind es auch alle folgenden: die Taylor'sche Reihe wird dann von dem ersten Gliede an unbrauchbar, dem eine unendliche Derivirte entspricht, und h enthält einen gebrochenen Exponenten an dieser Stelle.

3. Ist y unendlich, so sind es auch die Funktionen $y'\ y''\ldots$, und h bekommt negative Exponenten.

4. Für $y=x^m$ hat die Derivirte der $n$ten Ordnung die Form Ax^{m-n}, welche Größe durch keinen Werth von x unendlich wird, den Fall ausgenommen, wo $x=0$ und m keine ganze, positive Zahl ist; woraus hervorgeht, daß die Binomialformel jederzeit ihre Gültigkeit behält, den erwähnten Fall abgerechnet. Dasselbe läßt sich von den Reihen von a^x, $\text{Log}(1+x)$, $\sin x$ und $\cos x$ aussagen.

Anmerkung. Wollte man $fx = \sqrt{x} + \log(x-a)$ mittelst der Taylor'schen Formel für $x=a$ auffinden, so hätte man:

$$f'x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x-a},\ f''x = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{(x-a)^2}.$$

Für $x=a$ werden die ursprüngliche Funktion und ihre Derivirten unendlich; die Entwicklung von $f(a+h)$ nach ganzen, positiven Potenzen ist daher nicht möglich. Und in der That hat man $f(a+h) = \sqrt{(a+h)} + lh$. Wir sehen aus diesem Beispiele, daß, wenn in fx eine logarithmische Größe vorkommt, welche für einen bestimmten Werth von $x=a$ Null wird, die Entwicklung von $f(a+h)$ die transcendente Größe lh enthalte, welche bekanntlich sich durch keine nach den Potenzen von h fortlaufende Reihe darstellen läßt.

§. 44. In dem Falle also, daß die Derivirten der Funktion fx für einen bestimmten Werth von $x=a$ von einem gewissen Gliede an unendlich werden, muß man auf die Anwendung der Taylor'schen Formel, wenigstens von jenem Gliede an, Verzicht leisten, und die weitere Entwicklung auf anderem Wege zu erlangen suchen.

Beispiele: 1. $y = c + (x-b)\sqrt{x-a}$ gibt $y' = \frac{3x-2a-b}{2\sqrt{(x-a)}}$. Für $x=a$ ist y' unendlich, die folgenden Derivirten sind es daher auch, und h muß in der Entwicklung $Y = f(a+h)$ einen zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten haben. Man findet in der That auf gewöhnlichem Wege:

$$Y = c + (a-b)h^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{3}{2}}.$$

2. Es sei $y = c + x + (x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}$. Die Derivirten sind:

$$y' = 1 + (x-a)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}(x-b)\sqrt{(x-a)},$$

$$y'' = 3\sqrt{(x-a)} + \frac{3(x-b)}{4\sqrt{(x-a)}}.$$

Für $x=a$ wird $y = c+a$, $y' = 1$ und $y'' = \infty$, zum Beweis, daß die Entwicklung $f(a+h)$ nicht nach ganzen Potenzen von h fortschreiten kann. Nach der gewöhnlichen Methode erhält man für $x = a+h$ den Ausdruck:

$$Y = c + a + h + (a-b)h^{\frac{3}{2}} + h^{\frac{5}{2}}.$$

§. 45. Sind die verschiedenen brauchbaren Glieder der Entwicklung von $f(a+h)$ gefunden, so kann man auch, zur Bestimmung der folgenden Glieder, jenen bekannten Theil von $f(a+h)$ abziehen; der reducirte Rest wird dann eine gewisse Funktion S von h sein, welche man in eine, nach gebrochenen Potenzen von h fortlaufende, Reihe zu entwickeln hat.

Wenn man den Werth von S für $h=0$ mit A bezeichnet, so hat man $S=A+Mh^m$, wo h^m die den Ausdruck $S-A$ genau dividirende, höchste Potenz von h darstellt, dergestalt, daß der Quotient $M=\frac{S-A}{h^m}$ für $h=0$ weder verschwindet noch unendlich ist. Diese Bedingung wird uns die Zahl m und die von h abhängige Größe M kennen lehren. Bezeichnet auf ähnliche Weise B den Werth, welchen M für $h=0$ erhält; so kann man $M=B+Nh^n$ setzen, worauf sich n und N finden lassen, u. s. w. Die verlangte Entwicklung wird folglich sein:

$$S=A+Bh^m+Ch^{m+n}+Dh^{m+n+r}\ \ldots$$

Kommen in S negative Potenzen von h vor, so setze man $h=h'^{-1}$ und entwickele dann nach h', und ändere hierauf die Zeichen der Exponenten von h'.

§. 46. Wir wollen jetzt den Fall näher betrachten, in welchem für $x=a$ ein Glied P der Funktion fx verschwindet; die Funktion P enthält dann eine beliebige Potenz m von $x-a$ als Faktor, oder es ist $P=Q(x-a)^m$.

1. m sei eine ganze, positive Zahl. In der $m$ten Derivirten kommt ein von dem Faktor $x-a$ befreites Glied vor, weil der Exponent sich bei jeder Differentiation um eine Einheit vermindert, mithin zuletzt Null wird. Der in allen vorhergehenden Derivirten für den speciellen Werth von $x=a$ zum Verschwinden gebrachte Faktor Q erscheint daher in der $m$ten Derivirten und in den darauf folgenden wieder: der Taylor'sche Satz ist folglich im vorliegenden Falle anwendbar und es ist hier nichts weiter Besonderes zu erinnern.

Beispiele: I. $y=(x-a)^2(x-b)-ax^2$ liefert für $x=a+h$:

$$Y=-a^3-2a^2h-bh^2+h^3.$$

II. $y=x^4+(x-a)^3$ geht für $x=a+h$ in

$$Y=a^4+4a^3h+6a^2h^2+(4a+1)h^3+h^4 \text{ über.}$$

2. m sei ein zwischen l und $l+1$ liegender Bruch. Der besondere Werth $x=a$ bringt der Faktor Q in sämmtlichen Derivirten, bis einschlüssig zu jener der $l$ten Ordnung, zum Verschwinden, macht dagegen alle darauf folgenden wegen des Faktors $(x-a)^{m-l-1}$ unendlich, so daß die Taylor'sche Reihe, von diesem Gliede an, unbrauchbar ist. Und in der That würden, weil das durch $(x-a)^m$ angedeutete Wurzelzeichen in der ganzen Reihe verschwindet, während es in dem Ausdrucke $f(a+h)$ bleibt, diese beiden Theile keine gleiche Anzahl von Werthen zulassen, wenn nicht Bruchpotenzen von h vorkämen.

Beispiele: I. $y=x^3+(x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}}$ gibt für $x=a+h$:

$$Y=a^3+3a^2h+3ah^2+(a-b)h^{\frac{5}{2}}+h^3+h^{\frac{7}{2}}.$$

II. $y=b\pm\sqrt{(x-a)}$ liefert für $x=a+h$ den Ausdruck $Y=b\pm h^{\frac{1}{2}}$.

Anmerkung. Die hier stattfindende Aenderung der Form rührt von der durch das Verschwinden des Wurzelzeichens für einen Augenblick verminderten Anzahl der Werthe der Funktion her, welche im allgemeinen Zustande für jeden Werth einen besondern Zuwachs hat. So gibt die Taylor'sche Formel für $y=b\pm\sqrt{(x-a)}$ die beiden Reihen:

$$Y=y\pm\tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}h\mp\tfrac{1}{8}(x-a)^{-\frac{3}{2}}h^2\pm \text{ꝛc.},$$

wo das obere Zeichen dem einen, das untere dem andern der beiden Werthe von y entspricht. Im Fall die Funktion in einer impliciten Gleichung erscheint, ist in dem Ausdruck der Derivirten außer der unabhängigen Veränderlichen noch die Funktion vorhanden, wodurch die Anzahl der von der Taylor'schen Formel gelieferten Zuwachse derjenigen der Werthe der Funktion gleich gemacht wird. Vereinigen sich nun zufällig mehrere Werthe der Funktion in einen einzigen, so müssen diesem Werthe im Allgemeinen mehrere verschiedene Zuwachse zukommen, damit die Funktion ihre sämmtlichen Werthe wieder erlangt. Dieß leisten aber die Bruchpotenzen von h, indem dieselben eben so viele Bestimmungen zulassen, als deren das Wurzelzeichen mit sich führt. So bringen in unserm zweiten Beispiele für $x=a$ die dem einzigen Funktions-

werthe $y=b$ beigesellten Zuwachse $+h^{\frac{1}{2}}$, $-h^{\frac{1}{2}}$ die beiden Werthe wieder zum Vorschein, welche hier die Funktion besitzt.

3. m sei negativ. P und dessen sämmtliche Derivirten sind dann für $x=a$ unendlich, weil überall $(x-a)$ im Nenner erscheint. Die Taylor'sche Reihe wird hier vom ersten Gliede an schon unbrauchbar, und es kommen negative Potenzen von h vor.

Beispiele: I. $y=\frac{x^2}{x-a}$ verwandelt sich für $x=a+h$ in:

$$Y=a^2h^{-1}+2a+h.$$

II. $y=\frac{1}{\sqrt{(x^2-ax)}}$ geht für $x=a+h$ in:

$$Y=\frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\ldots \text{über.}$$

§. 47. Wir wollen jetzt annehmen, daß der Werth $x=a$ in der Funktion y das Verschwinden einer Wurzelgröße nach sich zieht, welche in der Derivirten y' wieder zum Vorschein kommt, d. h. daß die erste Potenz von $(x-a)$ ein Faktor jener Wurzelgröße ist. Wegen dieses Fortbestehens der Wurzelgröße in y', welche für $x=a$ in der ursprünglichen Funktion verschwindet, wird letztere eine geringere Anzahl Werthe als ihre Derivirte haben. Indem wir aber die Gleichung $y=fx$ auf eine passende Potenz erheben, können wir das in Frage stehende Wurzelzeichen wegschaffen, so daß es in der resultirenden Gleichung $z=F(x,y)=0$ nicht mehr vorkommt. Suchen wir hierauf die Differentialgleichung $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\cdot y'=0$, und setzen dann a statt x, ferner für y seinen entsprechenden einzigen Werth; so finden wir $A+By'=0$, wo A und B die in Zahlenwerthe übergegangenen Werthe darstellen. Der Annahme zufolge hat aber y' wenigstens zwei entsprechende Werthe α und β; es ist nämlich $A+B\alpha=0$, $A+B\beta=0$; woraus $B(\alpha-\beta)=0$, oder $A=0$ und $B=0$, weil α und β von einander verschieden sind. Unserer Differentialgleichung von $z=0$ geschieht demnach, ganz unabhängig von jedem Werthe von y' Genüge; d. h. es ist:

$$\frac{dz}{dx}=0,\ \frac{dz}{dy}=0,\ y'=\frac{0}{0}.$$

Gehen wir zu der zweiten Differentialgleichung über, welche von der Form ist:

$$\frac{dz}{dy} \cdot y'' + My'^2 + 2Ny' + L = 0,$$

so verschwindet darin das erste Glied und es bleibt die Gleichung:

$$My'^2 + 2Ny' + L = 0,$$

welche die beiden Werthe von y' kennen lehrt, da M, N und L bekannte Größen sind. Ließe y' mehr als zwei Werthe für einen von y, wenn $x=a$, zu, so würden M, N und L gleichzeitig verschwinden, und man müßte zu der dritten Differentialgleichung seine Zuflucht nehmen. In derselben ist y' auf der dritten Potenz, während y'' und y''' darin nicht mehr vorkommen, weil ihre Coefficienten $3(My'+N)$ und $\frac{dz}{dy}$ Null sind. Ueberhaupt wird man immer zu einer solchen Differentialgleichung aufsteigen müssen, deren Ordnung mit jener des für $x=a$ fortgegangenen Wurzelzeichens übereinstimmt.

Verschwindet in y und y' eine Wurzelgröße, die in y'' wieder vorkommt, was sich ereignet, wenn die zweite Potenz von $(x-a)$ Faktor gedachter Wurzelgröße ist; so haben für $x=a$ die Funktionen y und y' eine gleiche Anzahl Werthe, während y'' deren mehr besitzt. Schaffen wir daher das Wurzelzeichen aus der vorgelegten Gleichung $y=fx$ weg, und suchen dann mittelst der zweiten Differentialgleichung der gefundenen unentwickelten Gleichung $z=0$ den Werth von y''; so werden wir daraus $y''=\frac{0}{0}$ erhalten, weil sie für jeden Werth von y'' befriedigt wird. Um y'' zu finden, werden wir uns dann der dritten, vierten . . . Differentialgleichung bedienen.

Ein ähnliches Verfahren wird man beobachten, wenn $(x-a)^3$ Faktor einer Wurzelgröße in $y=fx$ ist; u. s. w.

Beispiele: 1. $y=x+(x-a)\sqrt{(x-b)}$.

Für $x=a$ findet man $y=a$, $y'=1\pm\sqrt{(a-b)}$.

Die vorgelegte Gleichung ist aber gleichgeltend mit

$$(y-x)^2=(x-a)^2(x-b).$$

Daraus die Differentialgleichung:

$$2(y-x)y'=2(y-x)+(x-a)(3x-2b-a),$$

deren beide Theile für $x=y=a$ verschwinden.

Die zweite Differentialgleichung ist:

$$(y-x)y''+(y'-1)^2=3x-2a-b,$$

welche sich für $x=a$ auf $(y'-1)^2=a-b$ reducirt, d. h. denselben Werth für y', wie oben, liefert.

2. Für $y=(x-a)(x-b)^{\frac{1}{3}}$ bekommt man, wenn $x=a$ gesetzt wird:

$$y=0,\ y'=\sqrt[3]{(a-b)}.$$

Schafft man in der primitiven Gleichung das Wurzelzeichen weg, und sucht dann die drei ersten Differentialgleichungen; so hat man:

$$\begin{aligned} y^3 &= (x-a)^3(x-b), \\ 3y^2y' &= (x-a)^2(4x-3b-a), \\ y^2y''+2yy'^2 &= 2(x-a)(2x-a-b), \\ y^2y'''+6yy'y''+2y'^3 &= 8x-6a-2b. \end{aligned}$$

Die drei ersten werden für $x=a$ und $y=0$ befriedigt, während die vierte $y'=\sqrt[3]{(a-b)}$ liefert.

3. $y=x+(x-a)^2\sqrt{x}$ gibt, wenn $x=a$ gesetzt wird:

$$y=a,\ y'=1,\ y''=\pm 2\sqrt{a}.$$

Die vorgelegte Gleichung verwandelt sich aber in

$(y-x)^2=(x-a)^4x$. Daraus findet man:

$$\begin{aligned} 2(y'-1)(y-x) &= (x-a)^3(5x-a), \\ (y'-1)^2+y''(y-x) &= 2(x-a)^2(5x-2a), \\ 3y''(y'-1)+y'''(y-x) &= 6(x-a)(5x-3a), \\ 3y''^2+4y'''(y'-1)+y^{\text{IV}}(y-x) &= 12(5x-4a). \end{aligned}$$

Für $x=a$ findet man $y=a$; in der ersten Differentialgleichung hebt sich alles auf; die zweite gibt $y'=1$, in der dritten hebt sich abermals alles auf; die vierte endlich liefert $y''=\pm 2\sqrt{a}$.

Ueber die Ergänzung der Taylor'schen Reihe.

§. 48. Es sei Ah^α ein Glied der nach steigenden Potenzen von h geordneten Reihe $f(a+h)$, wobei α positiv vorausgesetzt wird. Jenes Glied und alle darauf folgenden haben zur Summe einen Ausdruck von der Form $h^\alpha(A+Bh^\beta)$, dessen zweiter Faktor $A+Bh^\beta$ sich für $h=0$ auf A reducirt, wovon der Theil Bh^β mit h durch alle denk-

baren Zwischenstufen fortschreitet, so daß derselbe von A übertroffen wird, wenn man h sehr klein annimmt. Es existirt demnach ein gewisser Werth von h, für welchen jedes Glied der Reihe $f(a+h)$ größer ist als die Summe aller folgenden.

§. 49. Die Funktion fa kann, wenn a in $a+h$ übergeht, wachsen oder abnehmen, wobei wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, h eine positive Größe sein lassen. Wenn man h gehörig klein annimmt, so wird das Zeichen der Differenz $f(a+h)-fa=hf'a\ldots$ mit dem von $f'a$ übereinstimmen; die Funktion fa ändert sich daher in demselben oder entgegengesetzten Sinn wie h, je nachdem $f'a$, innerhalb desselben Intervalles der Werthe von a, stets positiv oder stets negativ bleibt. So wächst z. B. die Größe $\sin a$ von 0^0 bis 90^0, worauf sie wieder abnimmt, weil ihre Derivirte $\cos a$ positiv in dem ersten, negativ hingegen im zweiten Quadranten wird. Hieraus folgt, daß die Funktion fx, wenn x stufenweise von $x=a$ in $x=a+b$ übergeht, fortwährend innerhalb dieser Grenzen wächst oder abnimmt, je nachdem die Derivirte $f'x$ innerhalb gedachten Intervalles der Werthe von x stets positiv oder negativ ist, wobei dieselbe weder durch einen unendlichen noch unmöglichen Werth unterbrochen sein darf.

Es seien $a+h=p$ und $a+h=q$ diejenigen Werthe, welche bezüglich, beim stetigen Wachsen der Veränderlichen h von 0 bis b, dem kleinsten und größten Werthe von $f'(a+h)$ zugehören sollen, dergestalt, daß

$$f'(a+h)-f'p \text{ und } f'q-f'(a+h)$$

positive Resultate sind. Die letzteren sind aber nichts anders als die respectiven Derivirten in Bezug auf h von:

$$f(a+h)-fa-hf'p \text{ und } fa+hf'q-f(a+h)$$

Diese Funktionen, welche mit h verschwinden, werden daher von $h=0$ bis $h=b$ wachsen und positiv sein, d. h.

$$f(a+h)>fa+hf'p \text{ und } <fa+hf'q.$$

Man hat folglich $f(a+h)=fa+$ einer zwischen $hf'p$ und $hf'q$ liegenden Zahl: d. h. bleibt man in der Reihe $f(a+h)$ bei dem ersten Gliede fa stehen, so ist der Rest der Taylor'schen Reihe:

$$>hf'p \text{ und } <hf'q.$$

Anmerkungen: 1. $F(x+h)$ verwandelt sich in Fz, wenn $x+h=z$ gesetzt wird. Die Derivirte $F'z$ bleibt wegen $z'=1$

unverändert dieselbe, mag man x oder h als die Variablen ansehen. Man kann daher $F'(x+h)$ als die Derivirte von $F(x+h)$ betrachten, welche von den beiden Größen x oder h man auch als Veränderliche gewählt haben mag. Die oben in Bezug auf h gewonnenen Derivirten werden folglich mit denjenigen übereinstimmen, welche man in Bezug auf x gefunden und hernach $x=a$ gemacht hätte.

2. Mit leichter Mühe gelangt man zu einem ähnlichen Resultate, wenn h einen negativen Werth besitzt. Ist nämlich die Funktion $f'x$ stetig und von einerlei Zeichen zwischen $x=a$ und $x=a-b$, so haben innerhalb dieser Grenzen Funktion und Derivirte entgegengesetzte Zeichen.

§. 50. Die Taylor'sche Reihe:

$$f(a+h)=fa+hf'a+\tfrac{1}{2}h^2f''a\ \ldots$$

werde bei ihrem dritten Gliede abgebrochen; dabei seien $f''p$ und $f''q$ beziehungsweise der kleinste und größte Werth, welche die Funktion $f''(a+h)$ zwischen den Grenzen $h=0$ und $h=b$ erlangt, so daß die Ausdrücke:

$$f''(a+h)-f''p,\quad f''q-f''(a+h)$$

wie deren Stammfunktionen:

$$f'(a+h)-f'a-hf''p,\quad f'a+hf''q-f'(a+h),$$

welche mit h verschwinden, positiv sind; was gleichfalls von den Stammfunktionen der letztern gilt, nämlich von:

$$f(a+h)-fa-hf'a-\tfrac{1}{2}h^2f''p,\quad fa+hf'a+\tfrac{1}{2}h^2f''q-f(a+h),$$

Man hat folglich:

$$f(a+h)=fa+hf'a+\tfrac{1}{2}h^2A,$$

wo A eine zwischen $f''p$ und $f''q$ enthaltene Zahl darstellt.

Nimmt man daher von der Taylor'schen Reihe nur die beiden ersten Glieder, so ist der Rest dieser Reihe:

$$>\tfrac{1}{2}h^2f''p \text{ und } <\tfrac{1}{2}h^2f''q,$$

vorausgesetzt, daß zwischen den betrachteten Grenzen $f'(a+h)$, $f''(a+h)$ nicht unendlich werden.

Ueberhaupt ist, wenn man die Taylor'sche Reihe mit dem Gliede

$\dfrac{h^n}{1\cdot2\ \ldots\ n}f^{(n)}a$ abbricht,

der Rest der Reihe

$$> \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}p \text{ und } < \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}q,$$

wo p und q die Werthe von $x+h$ vorstellen, für welche dem Quotienten $\frac{f^{(n)}x}{1 \cdot 2 \ldots n}$, innerhalb der Grenzen von $x=a$ bis $x=a+h$, beziehungsweise der kleinste und größte Werth zu Theil werden: dabei ist aber nicht zu vergessen, daß innerhalb desselben Intervalles der Werthe von x, keine der Funktionen fx, $f'x$, ... $f^{(n)}x$ unendlich werden darf. Da p und q zwischen a und $a+h$ enthaltene Zahlen sind, so wird sich mithin der Rest der Reihe vollkommen durch $\frac{h^n \cdot f^{(n)}(a+j)}{1 \cdot 2 \ldots n}$ darstellen lassen, wo unter j eine passend gewählte, jedoch unbekannte Zahl zu verstehen ist.

Hiernach ergibt sich, insofern keine der Derivirten unendlich ist:

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{2} f''x \ldots + \frac{h^{n-1} f^{(n-1)} x}{1 \cdot 2 \ldots n-1} + \frac{h^n f^{(n)}(x+j)}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

Wir hätten somit einen neuen Beweis zur Taylor'schen Reihe geliefert und zugleich einen Ausdruck für den noch hinzuzufügenden Rest angegeben, wenn man die Reihe bei irgend einem ihrer Glieder abbricht, oder mit andern Worten, einen endlichen, gleichgeltenden Werth dafür gefunden.

Anmerkung. Es ist, um den Betrag der Ergänzung der Taylor'schen Reihe, wenn man sie mit dem Gliede $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}x$ abbricht, zu beurtheilen, nicht gerade nöthig, den größten und kleinsten Werth, deren der Quotient $\frac{f^{(n)}x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ fähig ist, während die Veränderliche durch alle denkbaren Zwischenstufen von x bis $x+h$ hindurch geht, zu nehmen; sondern es reicht zu diesem Behufe schon aus, bloß größere oder kleinere Werthe, als jener größte oder kleinste Werth von $f^{(n)}x$ angibt, zu betrachten.

Wir wollen nun das Vorhergehende auf einige besondere Fälle anwenden.

1. $y=a^x$ gibt $y^{(n)}=k^n \cdot a^x$. Der kleinste und größte Werth von $f^{(n)}(x+h)=k^n a^{x+h}$ entsprechen bezüglich dem $h=0$ und einem beliebigen h.

Die Ergänzung der abgebrochenen Reihe liegt daher zwischen:

$$\frac{a^{x+h} \cdot h^n k^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \text{ und } \frac{a^x h^n k^n}{1 \cdot 2 \ldots n}.$$

2. Für $\log(x+h)$ sind die fraglichen Grenzwerthe:

$$\pm \frac{h^n}{n(x+h)^n} \text{ und } \pm \frac{h^n}{nx^n}.$$

3. Für $y = x^m$ hat man $y^{(n)} = m(m-1) \ldots (m-n+1) x^{m-n}$.

Die Grenzwerthe, zwischen welchen die Ergänzung der abgebrochenen Reihe enthalten ist, sind demnach:

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-n+1) h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} (x+h)^{m-n} \text{ und}$$

$$\frac{m(m-1) \ldots (m-n+1) x^{m-n} h^n}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

4. $y = \sin x$ gibt $f^{(m)}(x+h) = \pm \sin(x+h)$ oder $= \pm \cos(x+h)$, je nachdem m eine von den Formen $4n$, $4n+2$, oder $4n+1$, $4n+3$ hat, wo n eine beliebige ganze Zahl darstellt. Der größte und kleinste Werth von $f^{(m)}(x+h)$ ist aber offenbar $+1$ und -1. Folglich ist:

$$\sin(x+h) > \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2} \sin x \ldots - \frac{h^m}{2 \cdot 3 \cdot m}, \text{ und}$$

$$< \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2} \sin x \ldots + \frac{h^m}{2 \cdot 3 \ldots m}.$$

Ausdehnung des Taylor'schen Lehrsatzes auf die Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§. 51. Es sei $z = f(x, y)$ eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. Wir wollen jetzt in derselben x mit $x+h$ und y mit $y+k$ vertauschen und die daraus resültirende Entwicklung, nach Potenzen der willkürlichen Zuwachse h und k, aufsuchen. Wir verfahren deshalb, wie wir im §. 18 gethan, d. h. anstatt zu gleicher Zeit die angezeigten Substitutionen vorzunehmen, lassen wir vorerst die Größe x allein sich ändern und in $x+h$ übergehen, während y als constant betrachtet wird. Diesem gemäß verwandelt sich z als bloße Funktion von x angesehen in:

$$f(x+h, y) = z + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

In diesem Resultate setzen wir überall $y+k$ statt y, während x unverändert bleibt. Auf solche Weise geht das erste Glied z in

$$f(x, y+k) = z + \frac{dz}{dy} k + \frac{d^2z}{dy^2} \frac{k^2}{2} + \frac{d^3z}{dy^3} \cdot \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \text{etc. über.}$$

Setzen wir in dieser Entwicklung $\frac{dz}{dx} h$ an die Stelle von z, so erhalten wir das in was das zweite Glied $\frac{dz}{dx} h$, wenn $y+k$ statt y geschrieben wird, übergeht, nämlich:

$$\frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx\,dy} hk + \frac{d^3z}{dx\,dy^2} \frac{k^2h}{2} + \text{etc.}$$

Auf dieselbe Art finden wir das was aus dem zweiten Gliede $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2}$ durch die Verwandlung von y in $y+k$ wird, nämlich:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^2dy} \frac{h^2k}{2} + \text{etc.; u. s. w.}$$

Vereinigen wir diese verschiedenen Theile, indem wir die Glieder dergestalt ordnen, daß diejenigen, in welchen die Summe der Exponenten von h und k einerlei ist, in dieselbe Colonne zu stehen kommen; so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = z + \frac{dz}{dy} k + \frac{d^2z}{dy^2} \frac{k^2}{2} &+ \frac{d^3z}{dy^3} \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \ldots \\ + \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dx\,dy} hk &+ \frac{d^3z}{dxdy^2} \frac{hk^2}{2} + \ldots \\ + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{h^2}{2} &+ \frac{d^3z}{dx^2dy} \frac{h^2k}{2} + \ldots \\ &+ \frac{d^3z}{dx^3} \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

Die verschiedenen Coefficienten von k und h und deren Potenzen, werden partielle Differentialcoefficienten oder partielle Derivirten genannt.

Das allgemeine Glied dieses Ausdrucks ist:

$$\frac{d^{m+n}z}{dy^m dx^n} \cdot \frac{k^m h^n}{(2 \cdot 3 \ldots m)(2 \cdot 3 \ldots n)}.$$

Hier wurde zuerst x in $x+h$ und dann y in $y+k$ verwandelt; allein wir hätten auch zuerst y und dann x sich ändern lassen können. Wir würden auf diese Art eine zweite von der erstern der Form nach verschiedene, jedoch ihr identische Entwicklung erhalten haben, wobei die Derivirten in Bezug auf y denen in Bezug auf x vorangegangen wären. Um zu jener zweiten Entwicklung zu gelangen, ist es hinreichend, hier oben y mit x und k mit h zu vertauschen, und umgekehrt. Die Identität dieser beiden Entwicklungen liefert bei der Zusammenstellung derjenigen Glieder, in denen einerlei Potenzen sowohl von h als auch von k vorkommen, nachstehende Reihe von Gleichungen:

$$\frac{d^2z}{dy\,dx}=\frac{d^2z}{dx\,dy},\quad \frac{d^3z}{dy^2\,dx}=\frac{d^3z}{dx\,dy^2},$$

$$\frac{d^3z}{dx^2dy}=\frac{d^3z}{dydx^2},\ \ldots\ \frac{d^{m+n}z}{dy^m dx^n}=\frac{d^{m+n}z}{dx^n\,dy^m};$$

woraus hervorgeht, daß bei der Bildung der partiellen Differentialcoefficienten von Funktionen zweier Veränderlichen es gleichgültig ist, in welcher Ordnung die Differentiation in Bezug auf dieselben vorgenommen wird.

Beispiele: 1. $z=\frac{x^3}{y^2}$ gibt $\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2}{y^2}$, $\frac{dz}{dy}=-\frac{2x^3}{y^3}$.

Differentiirt man das erste Resultat in Bezug auf y, so kommt

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=-\frac{6x^2}{y^3};$$

differentiirt man hingegen das zweite Resultat in Bezug auf x, so entsteht

$$\frac{d^2z}{dy\,dx}=-\frac{6x^2}{y^3},$$

welcher Ausdruck mit den vorhin gefundenen übereinstimmt. Die andern partiellen Differentialcoefficienten der zweiten Ordnung sind:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{6x}{y^2},\quad \frac{d^2z}{dy^2}=\frac{6x^3}{y^4}.$$

Durch Differentiation des ersten dieser Ausdrücke in Bezug auf y entspringt:

$$\frac{d^3z}{dx^2\,dy}=-\frac{12x}{y^3},\ \text{was mit}\ \frac{d^3z}{dy\,dx^2},$$

dem Resultate einer zweimaligen Differentiation in Bezug auf x des ersten partiellen Differentialcoefficienten

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{2x^3}{y^3}, \text{ übereinstimmt.}$$

Ebenso hat man $\frac{d^3z}{dy^2\,dx} = \frac{d^3z}{dx\,dy^2} = \frac{18x^2}{y^4}$.

2. Für $z = x^3 - x^2y$ findet man:

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 2xy, \quad \frac{dz}{dy} = -x^2;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 6x - 2y, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx} = -2x;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 6, \quad \frac{d^3z}{dx^2\,dy} = -2 = \frac{d^3z}{dy\,dx^2}.$$

Anmerkung. Es ist hier an seinem Ort, zu bemerken, daß eine Funktion von einer Veränderlichen, in jeder Ordnung, nur einen Differentialcoefficienten hat, während eine Funktion von zwei Veränderlichen zwei Differentialcoefficienten in der ersten Ordnung, drei in der zweiten, vier in der dritten u. s. w., besitzt.

§. 52. Weil x und y in der Gleichung $y = f(x, y)$ unabhängig von einander sind, so kann man dieselbe in Bezug auf x allein, oder blos auf y differentiiren; wir wollen die auf diesem Wege gefundenen Funktionen mit p und q bezeichnen, nämlich $\frac{dz}{dx} = p$ und $\frac{dz}{dy} = q$ setzen. Fände aber zwischen y und x eine bestimmte Abhängigkeit statt, wie $y = \varphi x$, so können jene partiellen Differentiale nicht mehr abgesondert von einander betrachtet werden, weil nämlich dann eine Aenderung von x diejenige von y zur Folge haben würde. Um diese beiden Fälle auf einen zurückzuführen, pflegt man die Existenz einer solchen Relation $y = \varphi x$ anzunehmen, wonach sich die Derivirte unter der Form $dz = pdx + qdy$ (§. 31) darstellt. Dabei ist aber in vorkommenden Fällen die jedesmalige Bedeutung jener Relation in gehörige Erwägung zu ziehen. Verlangt z. B. die Natur der Aufgabe eine bestimmte Abhängigkeit, so leitet man aus $y = \varphi x$ die Differentialgleichung $dy = y'dx$ ab,

woraus durch Substitution entsteht: $dz=(p+qy')dx$. Existirt aber gedachte Abhängigkeit nicht, so zerfällt die Differentialgleichung in zwei andere: denn dz, als das vollständige Differential einer Funktion z von zwei Veränderlichen, besteht aus zwei Theilen, wovon der eine $\frac{dz}{dx}dx$ sich bloß auf die Veränderliche x und der andere $\frac{dz}{dy}dy$ sich bloß auf die Veränderliche y bezieht, mithin:

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy. \text{ Folglich:}$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=p+qy';$$

woraus, weil sich diese Relation unabhängig von φx oder von ihrer Derivirten y' bewähren muß, entspringt:

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q.$$

Beispiele: 1. $z=\frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ gibt $dz=\frac{-axydx+ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

welche Gleichung mit den zwei nachstehenden gleichbedeutend ist:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{axy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{ax^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Für $z=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)$ hat man $dz=\frac{ydx-xdy}{y^2+x^2}$; woraus

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{dz}{dy}=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

§. 53. Es sei allgemein $u=0$ eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y, z. Besteht dabei noch eine andere Relation $z=F(x, y)$, so darf man in der vorgelegten nur eine Variable als unabhängig betrachten, und man hat (§. 19):

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dy}dz=0 \;\ldots\; (1); \text{ woraus:}$$

$$\left(\frac{du}{dx}+p\frac{du}{dz}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}+q\frac{du}{dz}\right)dy=0,$$

wenn man erwägt, daß $dz=pdx+qdy$ vermöge der Relation $z=F(x, y)$.

Es läßt sich nun mit leichter Mühe der Werth von $\frac{dy}{dx}$ finden, nämlich der von der Derivirten, welche man gefunden haben würde, wenn z aus der Gleichung $u=0$ eliminirt worden wäre.

Hat man aber nur eine Relation $u=0$, so hindert nichts eine zweite stillschweigend vorauszusetzen, wofern die letztere willkürlich bleibt. Auf diese Art zerfällt unsere vorhin aufgestellte Differentialgleichung, wegen der völligen Unbestimmtheit von y' in folgende zwei:

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0, \ldots (X).$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=0, \ldots (Y).$$

Dies Resultat stimmt mit demjenigen überein, welches man aus der Gleichung $u=0$ erhalten hätte, wenn darin nach und nach y und x als constant betrachtet wäre. Die Gleichung (1) wird folglich die Differentialgleichung von $u=0$ sein, mag eine andere Relation zwischen den 3 Veränderlichen x, y, z statt finden oder nicht.

Es hat jetzt gar keine Schwierigkeit, diese Betrachtungen auf Funktionen von 3, 4 ... Veränderlichen auszudehnen und ihre Entwicklungen nach den Potenzen der Zuwachse der unabhängigen Veränderlichen aufzufinden, weil es sich nur darum handelt, die nämlichen Operationen für jede Variable besonders auszuführen.

Anmerkung. Differentiirt man die Gleichung (X) in Bezug auf x und z, so findet man:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{d^2u}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{du}{dz}=0 \ldots (XX).$$

Differentiirt man die Gleichung (Y) in Bezug auf y und z, so erhält man:

$$\frac{d^2u}{dy^2}+2\frac{d^2u}{dy\,dz}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{dz^2}{dy^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{du}{dz}=0 \ldots (YY).$$

Differentiirt man endlich (X) in Bezug auf y und z, oder (Y) in Bezug auf x und z, so wird man dasselbe Resultat bekommen, nämlich:

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2u}{dz\,dy}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{d^2u}{dz\,dx}\cdot\frac{dz}{dy}+\frac{d^2z}{dx\,dy}\cdot\frac{dz}{dy}$$
$$+\frac{d^2u}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}=0 \ldots (XY).$$

Aus diesen drei Gleichungen (XX), (YY), (XY) werden sich die drei Differentialcoefficienten der zweiten Ordnung der Funktion z bestimmen lassen.

Beispiele: 1. $xy+xz+yz-a^2=0$. Man findet:

$$y+z+(x+y)\frac{dz}{dx}=0\ \ldots\ (X),$$

$$x+z+(x+y)\frac{dz}{dy}=0\ \ldots\ (Y),$$

$$2\cdot\frac{dz}{dx}+(x+y)\frac{d^2z}{dx^2}=0\ \ldots\ (XX),$$

$$2\cdot\frac{dz}{dy}+(x+y)\frac{d^2z}{dy^2}=0\ \ldots\ (YY),$$

$$1+\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}+(x+y)\frac{d^2z}{dx\,dy}=0\ \ldots\ (XY),$$

aus welchen Gleichungen die Werthe der fünf Differentialcoefficienten

$\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$ zu bestimmen sind.

2\. . . . . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Man erhält für die fünf Differentialcoefficienten folgende Werthe:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2x}{a^2z},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{c^2y}{b^2z};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2-y^2),\ \frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2-x^2),\ \text{und}$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}.$$

§. 54. Wir haben früher bemerkt, daß die Derivirte einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen zur Elimination einer Constante benutzt werden kann. Etwas Aehnliches, nur in viel größerer Allgemeinheit, zeigt sich bei den Gleichungen mit drei oder noch mehr Veränderlichen: es liegt hierin der Keim der sogenannten Rechnung mit partiellen Differentialgleichungen, welche durch ihre Anwendung auf Gegenstände der Mechanik, Astronomie und anderer Theile der Physik so wichtig geworden ist.

Man habe die Gleichung $z=ft$, wo t eine bekannte Funktion zweier Veränderlichen, $t=F(x,y)$ bedeutet. Die Differentialgleichungen in Bezug auf x und y besonders genommen sind:

$$\frac{dz}{dx}=p=f't\times\frac{dt}{dx},\ \frac{dz}{dy}=q=f't\times\frac{dt}{dy},$$

worin die Funktion $f't$ beiderseits dieselbe ist und die Differentialcoefficienten $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$ als bekannte Funktionen von x und y zu betrachten sind. Durch Elimination verschwindet $f't$ und man erhält:

$$p\cdot\frac{dt}{dy}=q\cdot\frac{dt}{dx},$$

eine Gleichung, die ausdrückt, daß z eine Funktion von t ist, $z=ft$, welche Form diese Funktion f auch haben mag.

Beispiele: 1. $z=f(x^2+y^2)$ gibt:

$p=f'(x^2+y^2)\times 2x$, $q=f'(x^2+y^2)\times 2y$; woraus $py-qx=0$.

Die letztere Gleichung bleibt unverändert, auf welche Art auch x^2+y^2 in dem Ausdrucke von z vorkommen mag. Sie paßt für:

$$z=(x^2+y^2)^3,\ z=\sqrt{(x^2+y^2)},$$

$$z=\log(x^2+y^2),\ z=\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}\ \text{u. s. w.}$$

Hieraus geht hervor, daß jede Funktion von x^2+y^2 nur ein besonderer Fall der partiellen Differentialgleichung $py-qx=0$ sein muß.

2. $z=f(ax+by)$ liefert $p=f'(ax+by)\cdot a$, $q=f'(ax+by)\cdot b$.

Hieraus entspringt durch Elimination von $f'(ax+by)$ die partielle Differentialgleichung: $bp-aq=0$.

3. Aus $y-bz=f(x-az)$ entsteht durch Differentiation:

$-bp=(1-ap)\times f'$ und $1-bq=-aq\times f'$. Eliminirt man hierauf f', so erhält man die partielle Differentialgleichung: $ap+bq=1$.

4. Für $\frac{y-b}{z-c}=f\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$ findet man die partielle Differentialgleichung:

$$z-c=p(x-a)+q(y-b).$$

Wir werden in der Folge Gelegenheit haben, zu zeigen, von welcher Wichtigkeit die hier vorgetragene Lehre ist; vor der Hand

mögen wir uns mit der Bemerkung begnügen, daß vermittelst der drei Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwei willkürliche Funktionen Ft, φt, wenn solche in der vorgelegten Gleichung vorkommen, eliminirt werden können.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung.

Der Maclaurin'sche Satz und Lagrange's Umkehrungsformel.

§. 55. Machen wir in der Taylor'schen Reihe $x=0$, und bezeichnen wir mit $f, f', f'', \ldots$ die dieser Annahme entsprechenden Werthe der Funktionen $fx, f'x, f''x \ldots$; so haben wir:

$$fh=f+hf'+\tfrac{1}{2}h^2f''+\tfrac{1}{6}h^3f'''+ \text{ꝛc.},$$

welche Formel nur so lange Gültigkeit behält, als keine der Funktionen $fx, f'x \ldots$ für $x=0$ unendlich wird. Wir können darin x statt h schreiben, weil die Größen $f, f', f'' \ldots$, die kein h enthalten, dadurch nicht geändert werden. Wir bekommen dann für die Entwicklung $y=fx$ folgende nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe:

$$y=fx=f+xf'+\frac{x^2}{2}f''+\frac{x^3}{2\cdot3}f'''+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}f^{\text{IV}}+\ldots,$$

welche unter dem Namen der Maclaurin'schen Formel bekannt ist, obschon sie bereits früher von Stirling gefunden worden sein soll. Sie bietet ein sehr vortheilhaftes Mittel zur Entwicklung der verschiedenen Funktionen in Reihen dar.

Beispiele: 1. $y=(a+x)^m$ gibt

$y'=m(a+x)^{m-1}$, $y''=m(m-1)(a+x)^{m-2} \ldots$: woraus:
$f=a^m$, $f'=ma^{m-1}$, $f''=m(m-1)a^{m-2} \ldots$

Hiernach erhalten wir Newtons Binomialformel wieder, nämlich:

$$y=(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}x^2+ \text{ꝛc.}$$

2. Für $y=\log(1+x)$ hat man $y'=\frac{m}{1+x}\,y''=-\frac{m}{(1+x)^2}\cdots$

Setzt man in diesen Ausdrücken $x=0$, so bekommt man mittelst des Maclaurin'schen Satzes:

$$\log(1+x)=m\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ꝛc.}\right)$$

3. Für die Funktion $y=\sin x$ ist $y'=\cos x$, $y''=-\sin x\ldots$; folglich nach dem Maclaurin'schen Satze:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ꝛc.}$$

4. Ist $y=\text{arc}(\text{tang}=x)$ gegeben, so hat man:

$$y'=\frac{1}{1+x^2},\ y''=-\frac{2x}{(1+x)^2}\ldots;\ \text{mithin}$$

$$y=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\text{ꝛc.}$$

Anmerkung. So wie hier die Taylor'sche Formel zur Entwicklung von Funktionen einer Variabeln in Reihen benutzt wurde, ebenso kann die erweiterte Taylor'sche Formel (§. 31) für Funktionen von zwei Variabeln zur Entwicklung der gleichen Funktionen in Reihen angewandt werden. Macht man nämlich in der citirten Formel sowohl in der Funktion $z=f(x,y)$, als auch in ihren sämmtlichen partiellen Differentialcoefficienten $x=0$, u. $y=0$ schreibt ferner x statt h und y statt k; so erhält man folgende, nach den Potenzen von x und y geordnete Entwicklung:

$$z=f(x,y)=f+xf'+yf_{,}+\frac{1}{1\cdot 2}(x^2f''+2xyf_{,}'+y^2f_{,,})$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(x^3f'''+3x^2yf_{,}''+3xy^2f'_{,,}+y^3f_{,,,})+\text{ꝛc};$$

wo die oben stehenden Accente die Differentiationen in Bezug auf x, die unten angeschriebenen hingegen die Differentiationen in Bezug auf y andeuten. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Man soll $z=a^x\,l(1+y)$ in eine nach x und y

geordnete Reihe entwickeln. Man findet für $x=0$ und $y=0$ die Funktion und ihre Differentialcoefficienten der Reihe nach $=0,\ 0,\ 1,\ 0\ la,\ -1,\ 0,\ l^2a$ u. s. w.; mithin

$$ax^2 l(1+y) = y + la\cdot xy - \tfrac{1}{2}y^2 + \text{etc.}$$

§. 56. Wenn eine der Größen $f,\ f',\ f''$ ... unendlich werden sollte, so ist die Maclaurin'sche Formel nicht mehr brauchbar, weil dann die in Frage stehende Funktion nicht nach ganzen und positiven Potenzen der Veränderlichen fortschreiten kann. In solchen Fällen muß man dann die Entwicklung auf die gewöhnliche Weise bewerkstelligen, oder vorerst eine passende Transformation vornehmen, welche die Anwendung der Taylor'schen Formel gestattet. Die Annahme von $y=x^k z$ führt öfters zum Ziele, insofern man die Constante k dergestalt zu bestimmen vermag, daß für $x=0$ sich keine der Funktionen $z,\ z',\ z''$ ... als unendlich herausstellt.

So kann diese Reihe für $y=\cot x$ nicht bloß nach positiven Potenzen von x fortschreiten, weil $\cot 0 = \infty$. Wir machen daher $y = \frac{z}{x} = \cot x$; woraus:

$$z = \frac{x\cos x}{\sin x} \text{ oder } z = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4} \ldots,$$

wenn man für $\sin x$ und $\cos x$ ihre gleichgeltenden Reihen zu Hülfe nimmt. Die successiven Derivirten der Funktion z lassen sich leicht finden, dieselben werden für $x=0$ nicht unendlich. Man erhält

$$f=1,\ f'=0,\ f''=-\tfrac{2}{3},\ f'''=0 \ldots; \text{ woraus:}$$

$$z = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2\cdot 5} - \ldots; \text{ folglich:}$$

$$\frac{z}{x} = \cot x = x^{-1} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2\cdot 5} - \frac{2x^5}{3^3\cdot 5\cdot 7} - \frac{x^7}{3^3\cdot 5^2\cdot 7} \ldots$$

Diese Verfahrungsweise hat jedoch den Nachtheil, daß sie nicht immer das Gesetz der Reihe gehörig kennen lehrt, wiewohl es hier zur Evidenz gebracht worden.

§. 57. Die Maclaurin'sche Formel läßt sich auch auf unentwickelte Gleichungen mit zwei Veränderlichen anwenden. Für $mz^3 - xz = m$ z. B. sucht man $z',\ z''$, ... und setzt dann überall $x=0$.

Man findet auf diese Art:

$$f=1,\ f'=\frac{1}{3m},\ f''=0,\ f'''=\frac{-2}{27m^3}\ldots;\ \text{woraus}$$

$$z=1+\frac{x}{3m}-\frac{x^3}{81m^3}+\frac{x^4}{243m^4}\ldots$$

§. 58. Man kann die Maclaurin'sche Formel selbst zur Entwicklung einer Funktion nach den fallenden Potenzen der Veränderlichen gebrauchen. Man macht zu diesem Behufe $x=t^{-1}$, sucht hierauf die nach den steigenden Potenzen von t fortlaufende Reihe, in welcher endlich x^{-1} statt t zu setzen ist, um die verlangte Entwicklung zu erhalten. Für $my^3-x^3y-mx^3=0$ z. B. mache man $x^3=t^{-1}$, woraus $my^3t^3-y=m$; suche jetzt die Derivirten $y', y''\ldots$ in Bezug auf t und setze dann überall $t=0$. Auf diese Weise bekommen wir, nachdem die für $t, t', t''\ldots$ gefundenen Werthe in die Maclaurin'sche Formel, wo t die Stelle von x vertritt, eingeführt und wieder x^{-3} statt t gesetzt worden, folgende Reihe:

$$y=m-m^4x^{-3}-3m^7x^{-6}-12m^{10}x^{-9}+55m^{13}x^{-12}\ldots$$

§. 59. Man soll die gegebene Funktion $u=fy$ nach den Potenzen einer andern veränderlichen Größe x entwickeln, deren Abhängigkeit von y durch folgende allgemeine Gleichung

$$y=t+x\cdot\varphi y\quad(1)$$

vermittelt wird, wo φ wieder eine andere gegebene Funktion bezeichnet, und x und t von einander unabhängige, veränderliche Größen sind. Bezeichnen wir die für $x=0$ stattfindenden Werthe der Differentialcoefficienten

$$\frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^3u}{dx^3}\ldots$$

durch $f', f'', f'''\ldots$, und den Werth der Funktion u unter der nämlichen Voraussetzung durch f; so ist nach Maclaurin's Formel:

$$u=f+xf'+\frac{x^2}{1\cdot2}f''+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}f'''+\ldots$$

Es kommt also darauf an, $f, f'\ f''\ldots$ durch t darzustellen.

Da y für $x=0$ in t übergeht, so hat man vorerst $f=ft$. Differentiirt man nun die Gleichung $u=fy$ in Bezug auf x und t, so erhält man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot f'y, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot f'y \;\ldots\; (2);$$

woraus durch Elimination von $f'y$ entspringt:

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Differentiirt man ferner die Gleichung (1) in Bezug auf t und x, so kommt:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + x \cdot \varphi'y \cdot \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dx} = \varphi y + x \cdot \varphi'y \cdot \frac{dy}{dx};$$

aus welchen Gleichungen, wenn man $\varphi'y$ eliminirt, sich ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi y \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Setzt man diesen Werth in die vorhin gefundene Relation:

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt},$$ so hat man:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \varphi y \;\ldots\; (3).$$

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf x, so bekommt man:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\varphi y \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dx}.$$

Allein die Größe $\varphi y \cdot \frac{du}{dt}$ ist wegen (2) mit $\varphi y \cdot f'y \cdot \frac{dy}{dt}$ gleichbedeutend; man kann sie daher als die Derivirte einer neuen Funktion von y in Bezug auf t ansehen, die durch u_1 bezeichnet sein mag, so daß man hat:

$$\frac{du_1}{dt} = \varphi y \cdot \frac{du}{dt};$$ folglich wegen (3) $\frac{du}{dx} = \frac{du_1}{dt}$. Hieraus:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u_1}{dt\,dx} = d \cdot \frac{\frac{du_1}{dx}}{dt}.$$

Der Gleichung (3) liegt aber bloß die Voraussetzung zum Grunde, daß u, in seiner Zusammenstellung mit der Relation $y = t + x \cdot \varphi y$, eine Funktion von y ist, ohne die Form dieser Funktion näher zu bestimmen.

Die erwähnte Gleichung läßt sich mithin auch auf die Funktion u_1 anwenden, und man hat sofort:

$$\frac{du_1}{dx} = \varphi y \cdot \frac{du_1}{dt}; \text{ folglich}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\left(\varphi y \cdot \frac{du_1}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\varphi^2 y \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dt} \ldots (4)$$

Betrachtet man ferner $\varphi^2 y \cdot \frac{du}{dt}$ als den auf t sich beziehenden Differentialcoefficienten einer Funktion von y, die wir u_2 heißen wollen; so hat man:

$$\frac{d^2n}{dx^2} = d \cdot \frac{\frac{du_2}{dt}}{dt} = \frac{d^2u_2}{dt^2}. \text{ Hieraus:}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = d \cdot \frac{\frac{d^2u_2}{dt^2}}{dx} = d^2 \cdot \frac{\frac{du_2}{dx}}{dt_2}.$$

Der Gleichung (3) gemäß ist aber $\frac{du_2}{dx} = \varphi y \cdot \frac{du_2}{dt}$; mithin besteht die Gleichung:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = d^2 \frac{\left(\varphi y \cdot \frac{du_2}{dt}\right)}{dt^2}, \text{ oder:}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = d^2 \frac{\left(\varphi^3 y \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dt^2} \ldots (5)$$

Aus dem unveränderlichen Gange der Rechnung erhellet, daß überhaupt:

$$\frac{d^nu}{dx^n} = d^{n-1} \frac{\left(\varphi^n y \cdot \frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}} \ldots (6)$$

Bestimmen wir jetzt die der Annahme x=0 entsprechenden Werthe dieser Differentialcoefficienten, wo unter derselben Voraussetzung die Gleichung (2) in $\frac{du}{dt} = f't$ übergeht; so finden wir folgende, von Lagrange zuerst aufgestellte Umkehrungsformel:

$$fy = ft + \varphi t \cdot f't \cdot x + \frac{d(f't \cdot \varphi^2 t)}{dt} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{d^2(f't \cdot \varphi^3 t)}{dt^2} \cdot \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \text{rc.}$$

§. 60. Hat man bloß $fy=y$, mithin auch $ft=t$, und $f't=1$; so geht unsere Reihe in folgende über:

$$y=t+x\cdot\varphi t+\frac{x^2}{2}\cdot d\cdot\frac{\varphi^2 t}{dt}+\frac{x^3}{2\cdot 3}\cdot d^2\cdot\frac{\varphi^3 t}{dt^2}+\text{rc.}$$

Wir wollen nun das Vorhergehende auf einige specielle Beispiele anwenden.

1. Es sei die Gleichung $y=t+xy^n$, und es werde verlangt, daraus $u=y^m$ durch x und t auszudrücken. Vergleicht man die gegebene Gleichung mit der Gleichung (1), so hat man:

$$ft=t^m,\ f't=mt^{m-1},\ \varphi t=t^n,\ \varphi t\cdot f't=mt^{m+n-1},$$
$$\varphi^2 t\cdot f't=mt^{m+2n-1},\ \varphi^3 t\cdot f't=mt^{m+3n-1}\ \ldots;$$

folglich nach der Umkehrungsformel:

$$y^m=t^m+mxt^{m+n-1}+m\cdot\frac{m+2n-1}{2}x^2t^{m+2n-2}+\text{rc.}$$

2. Aus der Gleichung $y=t+x\sin y$ soll y durch x und t bestimmt werden.

Die Zusammenstellung dieser Gleichung mit jener (1) gibt $fy=y$, $\varphi y=\sin y$. Mit diesen erhält man nach der Umkehrungsformel:

$$y=t+x\sin t+\frac{x^2}{2}\sin 2t+\frac{x^3}{2\cdot 4}(3\sin 3t-\sin t)+\text{rc.}$$

§. 61. Macht man $x=1$, so verwandelt sich die Entwicklung für fy aus $y=t+\varphi y$ in:

$$fy=ft+\varphi t\cdot f't+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d(\varphi^2 t\cdot f't)}{dt}+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{d^2(\varphi^3 t\cdot f't)}{dt^2}+\text{rc.}$$

Man kann damit y^n aus $\alpha-\beta y+\gamma y^m=0$ finden. Denn die letzte Gleichung unter die Form $y=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}y^m$ gebracht und mit $y=t+\varphi y$ verglichen, liefert:

$$t=\frac{\alpha}{\beta},\ \varphi y=\frac{\gamma}{\beta}y^m,\ fy=y^n.\ \text{Folglich:}$$

$$y^n=\frac{\alpha^n}{\beta^n}\Big(1+\frac{n}{1}\frac{\alpha^{m-1}\gamma}{\beta^m}+\frac{n(n+2m-1)}{1\cdot 2}\frac{\alpha^{2m-2}\gamma^2}{\beta^{2m}}$$
$$+\frac{n(n+3m-1)(n+3m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\alpha^{3m-3}\gamma^3}{\beta^{3m}}+\text{rc.}\Big)$$

Anmerkung. Da die vorgelegte Gleichung für y^n eben so viele Werthe, als sie Wurzeln zuläßt, liefern muß; so entsteht die Frage, welcher Wurzel die hier gegebene Entwicklung angehöre. Lagrange hat nachgewiesen, daß dieselbe der kleinsten Wurzel der vorgelegten Gleichung entsprechen müsse, wie wir hier an dem speciellen Beispiele $\alpha-\beta y+\gamma y^2=0$ zeigen wollen.

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$y=\frac{\beta}{2\gamma}\left[1\pm\sqrt{\left(1-\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}\right)}\right],$$

oder wenn man den Wurzelausdruck in eine Reihe verwandelt:

$$y=\frac{\beta}{2\gamma}\pm\frac{\beta}{2\gamma}\left(1-2\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}-1\cdot2\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4}-1\cdot1\cdot4\frac{\alpha^3\gamma^3}{\beta^6}-\text{etc.}\right).$$

Indem man blos das untere Zeichen nimmt, kommt:

$$y=\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}+2\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4}+\text{etc.}\right),$$

welches Resultat mit dem hier oben gefundenen Ausdrucke von y^n genau übereinstimmt, wenn man darin $n=1$ und $m=2$ macht.

§. 62. Man kann die Lagrange'sche Formel mit Vortheil zur Umkehrung der Reihen benutzen. Um z. B. die Reihe

$$z=y+\alpha y^2+\beta y^3+\gamma y^4+\text{etc.}$$

umzukehren, schreiben wir sie vorerst folgendermaßen:

$$y=z-y^2(\alpha+\beta y+\gamma y^2\ .\ .\ .).$$

Unter dieser Gestalt mit der Gleichung $y=t+\varphi y$ verglichen, haben wir:

$$t=z,\ \varphi y=-y^2(\alpha+\beta y+\gamma y^2\ .\ .\ .),\ fy=y.$$

Hiernach findet man:

$$y=z-\alpha z^2+(2\alpha^2-\beta)z^3+(5\alpha\beta-\gamma+5\alpha^3)^4z+\text{etc.}$$

Gebrauch der Differentialrechnung bei der Auflösung der Gleichungen und bei der Herleitung summirbarer Reihen.

§. 63. Wir wollen jetzt mittelst der Differentialrechnung einige schon bekannte Lehrsätze aus den Gleichungen nachweisen.

1. Es sei y eine solche Funktion von x, daß

$$y=(x-a)^m \cdot (x-b)^n \ldots \times P,$$

wo P die ungleichen Faktoren enthält. Geht man zu den Logarithmen über und differentiirt dann beiderseits, so kommt:

$$y'=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} \ldots [mP(x-b) \ldots + nP(x-a) \ldots]$$

Der zwischen der Funktion y und ihrer Derivirten y' gemeinschaftliche Theiler enthält also alle gleichen Faktoren von y, jedoch in einer um eine Einheit niedrigeren Potenz, als sie in y selbst enthalten sind.

2. Die Derivirte von

$$l(\cos x \pm \sin x \cdot \sqrt{-1}) \text{ ist } \frac{-\sin x \pm \cos x \cdot \sqrt{-1}}{\cos x \pm \sin x \cdot \sqrt{-1}},$$

welche sich auf $\pm\sqrt{-1}$ reducirt. Andererseits ist aber $\pm\sqrt{-1}$ zugleich die Derivirte von $\pm x\sqrt{(-1)}$; folglich:

$$l(\cos x \pm \sin x \cdot \sqrt{-1}) = \pm x\sqrt{-1}.$$

Nimmt man auf jeder Seite der vorhergehenden Gleichung, anstatt der Logarithmen die entsprechenden Zahlen; so erhält man die im §. 101 der höhern Algebra aufgefundene Relation wieder.

3. Sind $a, b, c \ldots$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + u = 0, \text{ so ist:}$$

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + u = (x-a)(x-b) \ldots$$

Indem man zu den Logarithmen übergeht und differentiirt, entsteht:

$$\frac{mx^{m-1} + p(m-1)x^{m-2} \ldots}{x^m + px^{m-1} + \ldots} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \ldots$$

Entwickelt man jedes dieser Glieder durch Division, und addirt dann diese Entwicklungen; so erhält man die zwischen den Coefficienten einer Gleichung und den Potenzen der Wurzeln derselben bestehende merkwürdige Relation wieder, deren Newton zuerst Erwähnung gethan. (Siehe höhere Algebra §. 123.)

4. Es stelle Fx eine rationale und ganze Funktion von x dar, ferner bezeichne k den ersten Näherungswerth einer der Wurzeln der

Gleichung $Fx=0$, und y den unbekannten Theil, um welche die Wurzel von jenem Näherungswerth verschieden ist. Man hat dann die gesuchte Wurzel $x=k+y$ und nach dem Taylor'schen Satze:

$$F(k+y)=Fk+yF'k+\tfrac{1}{2}y^2F''k+ \text{ꝛc.} =0.$$

Wäre y so klein, daß man dessen höhere Potenzen vernachlässigen kann: so erhält man $y=-\frac{Fk}{F'k}$, wie es Newton's Methode zur Berechnung der Wurzeln verlangt. Will man jedoch kein Glied in der vorhergehenden Entwicklung weglassen, so kann man die Lagrange'sche Umkehrungsformel zur Bestimmung des Werthes von y benützen.

Man findet auf diese Art, wenn der Abkürzung halber, $\frac{Fk}{F'k}=z$ gesetzt worden:

$$y=-z-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{F''k}{F'k}+\frac{z^3}{2\cdot3}\left[\frac{F'''k}{F'k}-3\left(\frac{F''k}{F'k}\right)^2\right]+\ldots;$$

folglich die gesuchte Wurzel:

$$x=k-z-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{F''k}{F'k}+ \text{ꝛc.}$$

Für die Gleichung $x^3-2x-5=0$ findet man als ersten Näherungswerth $k=2,1$. Nun ist:

$$Fk=k^3-2k-5=0,061;\ F'k=3k^2-2=11,23;\ F''k=6k=12,6.$$

Folglich: $z=\frac{Fk}{F'k}=\frac{61}{11230};\ \frac{F''k}{F'k}=\frac{1260}{1123};$

$$x=2,1-0,00543188-0,00001655=2,09455157.$$

§. 64. Wenn man die Summe einer nach den Potenzen von x fortlaufenden Reihe kennt, so lassen sich daraus durch Differentiation unzählig viele andere summirbare Reihen herleiten. Folgende, aus Euler's Anleitung zur Differentialrechnung entlehnte Beispiele werden dies deutlich machen:

1. Man hat bekanntlich:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3\ \ldots$$

durch wiederholtes Differentiiren auf beiden Seiten entsteht:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+ \text{ꝛc.}:$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+ \text{ꝛc.};$$

$$\frac{1}{(1-x)^4}=1+4x+10x^2+ \text{ꝛc.}$$

2. Diese Methode gewinnt noch bedeutend an Umfang, wenn man vor jedesmaliger Differentiation mit irgend einer Funktion von x multiplicirt.

Man multiplicire vorerst die Reihe

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+ \text{ꝛc.}$$

mit x^m, differentiire und dividire dann das Ganze durch x^{m-1}.

Man findet auf solche Weise:

$$\frac{m}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}=m+(m+1)x+(m+2)x^2+ \text{ꝛc.}$$

3. Die letztere Reihe multiplicire man mit x^n, differentiire dann und dividire das Ganze durch x^{n-1}. Es entsteht dadurch folgende Reihe:

$$\frac{mn}{1-x}+\frac{(m+n+1)}{(1-x)^2}x+\frac{2x^2}{(1-x)^3}$$
$$=mn+(m+1)(n+1)x+(m+2)(n+2)x^2+ \text{ꝛc.}$$

Nichts hindert uns, auf diese Art weiter fortzufahren.

4. Es sei die Summe der Reihe $S=ax+bx^2+cx^3+$ ꝛc. bekannt. Durch Multiplication mit x^m, darauf bewerkstelligter Differentiation und Division des Ganzen mit x^{m-1} entspringt:

$$mS+x\frac{dS}{dx}=(m+1)ax+(m+2)bx^2+(m+3)cx^3+ \text{ꝛc. (A).}$$

Will man also die Summe folgender Reihe finden,

$$S'=\alpha ax+(\alpha+\delta)bx^2+(\alpha+2\delta)cx^3 \text{ ꝛc.},$$

welche aus der Multiplication der einzelnen Glieder der gegebenen Reihe S mit den einzelnen Gliedern der arithmetischen Progression $\alpha, \alpha+\delta \ldots$, entspringt; so braucht man bloß die Reihe (A) mit δ zu multipliciren und $m=\frac{\alpha-\delta}{\delta}$ zu machen. Für die gesuchte Summe S' ergibt sich dann:

$$S'=(\alpha-\delta)S+\delta x\cdot\frac{dS}{dx}.$$

Untersuchung unbestimmter analytischer Ausdrücke.

§. 65. Man kommt zuweilen auf Bruchfunktionen, welche für einen gewissen Werth von $x=a$ im Zähler sowohl wie im Nenner verschwinden, mithin sich unter der unbestimmt scheinenden Form $\frac{0}{0}$ darbieten, während sie, wenn Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Faktor dividirt worden, einen angebbaren Werth besitzen. Die Differentialrechnung gibt uns ein leichtes Mittel an die Hand, diesen Werth, welcher für $x=a$ Null, oder endlich oder unendlich ist, aufzufinden. Wir substituiren deshalb $x+h$ statt x in dem vorgelegten Bruch $\frac{P}{Q}$, wodurch derselbe sich in

$$\frac{P+hP'+\frac{1}{2}h^2P''+ \text{etc.} \ldots}{Q+hQ'+\frac{1}{2}h^2Q''+ \text{etc.} \ldots} \ldots \text{(A) verwandelt.}$$

Machen wir jetzt $x=a$, unter welcher Annahme P und Q verschwinden, dividiren ferner oben und unten durch h und setzen dann $h=0$; so bekommen wir $\frac{P'}{Q'}$ als gesuchten wahren Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$. Dieser Werth wird Null oder unendlich, je nachdem unter derselben Voraussetzung P' oder Q' verschwindet. Fallen die Derivirten P' und Q' mit P und Q zugleich weg, so müssen wir Zähler und Nenner der Entwicklung (A) durch h^2 dividiren und dann $h=0$ machen, wonach sich $\frac{P''}{Q''}$ als wahrer Werth von $\frac{P}{Q}$ für $x=a$ herausstellt, u. s. w. Um also den wahren Werth eines Bruches zu finden, welcher sich für $x=a$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darbietet, differentiire man jeden Zähler und Nenner derselben für sich, so oft und so lange hintereinander, bis man zu Differentialcoefficienten gelangt, welche für den erwähnten Werth der Variabeln nicht beide verschwinden. Der Quotient der Werthe, welche jene Differentialcoefficienten dabei erhalten, gibt den wahren Werth des vorgelegten Bruches für den betrachteten Fall an.

§. 66. Wir gehen jetzt zu Anwendungen dieser Regel über.

1. Die Formel $\frac{x^n-1}{x-1}$, welche die Summe der n ersten Glieder

der geometrischen Progression $1:x:x^2 \ldots$ ausdrückt, wird $\frac{0}{0}$ für $x=1$. Die Derivirten des Zählers und Nenners sind nx^{n-1} und 1, wonach sich für $x=1$ die Zahl n als gesuchte Summe ergibt, wie es sein muß.

2. Der wahre Werth von $\frac{ax^2+ac^2-2acx}{bx^2-2bcx+bc^2}$ für $x=c$ ergibt sich erst nach zwei Differentiationen; denn die erste liefert $\frac{ax-ac}{bx-bc}$, welches Resultat noch $\frac{0}{0}$ wird. Nach der zweiten Differentiation findet man $\frac{a}{b}$.

Wegen des gemeinschaftlichen Faktors $(x-c)^2$ waren hier zwei Differentiationen nöthig.

3. $\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x=a$. Nach einmaliger Differentiation des Zählers und Nenners findet man, daß nur der erste noch für $x=a$ verschwindet; der wahre Werth der gegebenen Funktion ist folglich gleich Null. Es kömmt dies davon her, daß der Zähler den Faktor $(x-a)^2$ und der Nenner den Faktor $(x-a)$ hat.

4. Aus einem ähnlichen Grunde findet man die Funktion: $\frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}$ unendlich für $x=a$.

5. Die transcendente Funktion $\frac{a^x-b^x}{x}$ welche für $x=0$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält, findet man gleich $l\left(\frac{a}{b}\right)$.

6. Die Funktion $\frac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ wird $\frac{0}{0}$, wenn $x=90^0$. Mittelst unserer Regel findet man ihren wahren Werth gleich 1.

7. $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a-\sqrt[4]{(ax^3)}}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x=a$. Nach der Regel erhält man $\frac{16a}{9}$ als wahren Werth.

8. $\frac{1-x+lx}{1-\sqrt{(2x-x^2)}}$ nimmt für $x=1$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Man findet,

nachdem Zähler und Nenner differentiirt worden, -1 als gesuchten Werth.

§. 67. Die hier angegebene Methode führt zu keinem Resultate, wenn der Taylor'sche Satz in den noch beizubehaltenden Gliedern unbrauchbar ist; ein Umstand, der sich jedoch bald zu erkennen gibt, weil einer der in Betracht gezogenen Differentialcoefficienten für den partikulären Werth von x unendlich wird. Im vorliegenden Falle verfährt man dann wie folgt:

Man substituire $a+h$ statt x in die Bruchfunktion $\frac{P}{Q}$ und entwickle hierauf sowohl P als Q nach aufsteigenden Potenzen von h, wo man gewöhnlich schon bei den ersten Gliedern der Entwicklung stehen bleiben kann. dadurch verwandelt sich

$$\frac{P}{Q} \text{ in } \frac{Ah^m + A'h^{m'} + \text{etc.}}{Bh^n + B'h^{n'} + \text{etc.}},$$

wo es nicht mehr erforderlich ist, daß die Exponenten m, m', n, n'... ganze Zahlen sind. In dem letztern Ausdrucke, dessen Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor h haben, sind die drei Fälle $m>n$, $m=n$ und $m<n$ zu unterscheiden.

Im ersten Falle läßt sich unser Bruch in:

$$\frac{Ah^{m-n} + A'h^{m'-n} + \text{etc.}}{B + B'h^{n'-n} + \text{etc.}},$$

im zweiten in ... $\frac{A + A'h^{m'-m} + \text{etc.}}{B + B'h^{n'-m} + \text{etc.}}$,

im dritten in ... $\frac{A + A'h^{m'-m} + \text{etc.}}{Bh^{n-m} + B'h^{n'-m} + \text{etc.}}$ verwandeln.

Machen wir nun in diesen drei Fällen $h=0$, um den wahren Werth von $\frac{P}{Q}$ zu bekommen, der $x=a$ entspricht; so finden wir im ersten Falle das Resultat Null, im zweiten $\frac{A}{B}$, im dritten unendlich. In den drei Fällen hängt mithin der wahre Werth von den ersten Gliedern der beiden Reihen ab, welche die Entwicklungen des Zählers und Nenners, nachdem in ihnen $a+h$ statt x gesetzt worden, darbieten.

§. 68. Das hier angegebene Verfahren soll in folgenden Beispielen angewandt werden.

1. $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x=a$. Durch Differentiiren werden wir nie zum wahren Werthe gelangen, weil die Differentialcoefficienten des Zählers und Nenners durch diese Annahme unendlich groß werden. Allein macht man $x=a+h$, so geht unser Bruch in $\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}=(2a+h)^{\frac{3}{2}}$ über, woraus für $h=0$ der gesuchte wahre Werth $(2a)^{\frac{3}{2}}$ entspringt.

2. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x=a$. Setzt man $a+h$ für x, wie es die Regel vorschreibt, so erhält man:

$$\frac{(a+h)^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}+h^{\frac{1}{2}}}{(2ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{h^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}h+\text{etc.}}{h^{\frac{1}{2}}(2a+h)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}+\text{etc.}}{(2a+h)^{\frac{1}{2}}},$$

wenn man für den Zähler die Binomialformel benutzt, und oben und unten durch $h^{\frac{1}{2}}$ dividirt. Setzt man hierauf $h=0$, so ergibt sich $\frac{1}{\sqrt{(2a)}}$ als der gesuchte Werth der gegebenen Funktion für $x=a$.

3. In der Funktion $\frac{(x-c)\sqrt{(x-b)}+\sqrt{(x-c)}}{\sqrt{2c}-\sqrt{x+c}+\sqrt{x-c}}$, welche für $x=c$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, setzt man $x=c+h$. Dadurch bekommt man $\frac{\sqrt{h}+h\sqrt{(c-b)}+\text{etc.}}{\sqrt{h}-\frac{1}{2}h(2c)^{-\frac{1}{2}}+\text{etc.}}$; woraus, wenn wieder gehörig reducirt und dann $h=0$ gesetzt worden, sich 1 als wahrer Werth herausstellt.

4. Für $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+x-a}{(1+x-a)^3-1}$ findet man, wenn man $x=a+h$ setzt, und dann, nachdem möglichst reducirt worden ist, $h=0$ macht, $\frac{1}{3}$ als gesuchten Werth für $x=a$.

§. 69. Es gibt noch andere unbestimmte Rechnungsformen, welche durch eine angemessene Verwandlung sich auf die bisher betrachtete Gestalt $\frac{0}{0}$ bringen lassen; wir sind daher nach dem vorhin Gesagten gleichfalls im Stande, über ihre eigentliche Bedeutung zu urtheilen.

1. Ein Produkt $P \cdot Q$ erhält für $x=a$ die Form $0 \cdot \infty$.

Unser Produkt ist mit $\frac{P}{\frac{1}{Q}}$ gleichgeltend, unter welcher letzterer Gestalt es offenbar für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Als Beispiel diene die Funktion $y=(1-x) \cdot tg(\frac{1}{2}\pi x)$. Für $x=1$ wird dieselbe $=0 \cdot \infty$. Allein wegen $tg=\frac{1}{cotg}$ hat man $y=\frac{1-x}{cotg(\frac{1}{2}\pi x)}$, eine Funktion, deren wahrer Werth nach der früher angegebenen Regel gleich $\frac{2}{\pi}$ gefunden wird.

2. Zähler und Nenner eines Bruches $\frac{P}{Q}$ werden für $x=a$ zugleich unendlich. Unser Bruch läßt sich aber auch folgendermaßen schreiben: $\frac{\frac{1}{Q}}{\frac{1}{P}}$, so daß wir jetzt für $x=a$ wieder die Form $\frac{0}{0}$ erhalten.

Man soll $y=\frac{tg\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right)}{\frac{x^2}{a(x^2-a^2)}}$ für $x=a$ bestimmen. Man findet für diesen Werth $y=\frac{\infty}{\infty}$. Schreibt man aber die gegebene Funktion wie folgt:

$$y=\frac{a(x^2-a^2)}{x^2 \cdot cot\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right)},$$

so bekommt y für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$, woraus sich nach der frühern Regel $-\frac{4a}{\pi}$ als wahrer Werth ergibt.

Anmerkung. Man kann hier auch Zähler und Nenner differentiiren, ohne jene Formänderung erst vorzunehmen. Denn der

ersten Regel zufolge für x=a ist $\frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{Q}} = \frac{\frac{-P'}{P^2}}{\frac{-Q'}{Q^2}}$, was mit $\frac{Q}{P} = \frac{Q^2}{P^2} \cdot \frac{P'}{Q'}$ gleichbedeutend ist, oder nachdem beide Seiten durch $\frac{P^2}{Q^2}$ multiplizirt worden, mit $\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}$, woraus die Richtigkeit unserer Aussage erhellet.

3. Die Funktion $y=P-Q$ bekommt für $x=a$ die Form $\infty-\infty$. Man schreibe, wenn

$$P=\frac{1}{R} \text{ und } Q=\frac{1}{T} \text{ ist: } y=\frac{1}{R}-\frac{1}{T}=\frac{T-R}{RT}.$$

Für $x=a$ werden P und Q unendlich, mithin T und R Null; die Funktion y hat daher die Form $\frac{0}{0}$, deren wahrer Werth jetzt wie oben bestimmt wird.

Man soll den Werth von $y=x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\pi \sec x$ für $x=90^0$ bestimmen. Für diesen Werth von x wird $y=\infty-\infty$; man bringe daher y vorerst auf die Form: $y=\frac{x \sin x - \frac{1}{2}\pi}{\cos x}$, wodurch nun y für $x=90^0$ die Gestalt $\frac{0}{0}$ erhält. Man findet jetzt -1 als den gesuchten Werth der obigen, unter der Form $\infty-\infty$ erscheinenden Differenz.

Anmerkung. Die durch P und Q dargestellten Funktionen von x können, falls sie algebraisch, rational und ganz sind, nur dann unendlich werden, wenn x es auch ist. Die Differenz $P-Q$ kann daher im vorliegenden Falle keinen endlichen Werth annehmen, es sei denn, daß $P=Q+c$ wäre, wo c eine constante Größe bedeutet.

4. Die Funktion $y=P^Q$ stellt sich für $x=a$ unter einer der unbestimmten Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ dar, so daß für $x=a$ wird:

$P=0$ und $Q=0$, oder
$P=\infty$ und $Q=0$, oder
$P=1$ und $Q=\infty$.

Gehen wir zu den Logarithmen über, so kommt:

$$ly = \frac{lP}{Q^{-1}}; \text{ hieraus } y = \frac{lP}{e^{Q-1}}.$$

Da die Funktion y unter dieser Gestalt für $x = a$ die Form $e^{\frac{\infty}{\infty}}$ oder $e^{\frac{0}{0}}$ annimmt, so ist nichts weiter nöthig, als den Werth von $\frac{lP}{Q^{-1}}$ nach der erwiesenen Regel zu suchen. Der besondere Werth von $y = P^Q$, welcher für $x = a$ sich unter einer von den Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ darbietet, stimmt demnach mit dem entsprechenden Werth der Exponentialgröße $\frac{e-P'Q^2}{PQ'}$ überein. Man soll den Werth von $y = (ax^2 + bx)^x$ für $x = 0$ bestimmen. Man findet 1 als gesuchten Werth.

Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen.

§. 70. Wenn eine Funktion $y = fx$, während die ihr zum Grunde liegende veränderliche Größe x verschiedene successive Werthe erhält, aus dem Zustande des Wachsens in jenen des Abnehmens übergeht; so heißt der Werth, welchen diese Funktion bei dem Uebergange von der Zunahme zur Abnahme annimmt, ein Maximum oder Größtes. Geht hingegen die Funktion aus dem Zustande des Abnehmens in jenen des Wachsens über, so heißt der Werth, welcher diesem Uebergange entspricht, ein Minimum oder Kleinstes. Die Funktion $y = fx$ wird also für einen bestimmten Werth von $x = a$ ein Maximum oder Minimum, wenn für diesen Werth die unmittelbar vorangehenden und unmittelbar nachfolgenden Werthe von y im ersten Falle zu gleicher Zeit kleiner, und im zweiten Falle gleichzeitig größer als fa ausfallen. Kurz, damit fa ein Maximum oder Minimum sei, müssen $f(a+h)$ und $f(a-h)$ beide zugleich $< fa$ oder beide zugleich $> fa$ werden, wie klein man h auch nehmen mag.

Nun haben wir aber:

$$f(a \pm h) = fa \pm hf'a + \frac{h^2}{2} f''a \pm \text{ ꝛc.},$$

in welchen Entwicklungen jederzeit h hinreichend klein genommen werden kann, daß das Glied $hf'a$ die Summe aller nachfolgenden Glieder

übersteigt, wonach das Zeichen dieses Gliedes mit jenem der Summe der ganzen Reihe, von ihm selbst an gezählt, zusammentrifft.

Es ist hiernach $f(a \pm h) = fa \pm \alpha h$, woraus hervorgeht, daß fx nur dann ein Größtes oder Kleinstes werden kann, wenn $f'a = 0$ ist.

Will man daher bei einer vorgelegten Funktion $y = fx$ untersuchen, ob und für welche Werthe von x sie ein Größtes oder Kleinstes zulasse; so muß man $y' = f'x = 0$ setzen und daraus x bestimmen. Die solchergestalt gefundenen Werthe durch a darstellend, haben wir dann:

$$f(a \pm h) = fa + \tfrac{1}{2} h^2 f''a \pm \tfrac{1}{6} h^3 f'''a + \text{ꝛc.}$$

Hieraus entspringt, wenn h hinlänglich klein genommen wird, damit $\frac{1}{2} h^2 f''a$ die Summe aller nachfolgenden Glieder übertrifft:

$$f(a \pm h) - fa = \alpha h^2,$$

d. h. ein positives oder negatives Resultat, je nachdem α, was selbst wieder von $f''a$ abhängt, positiv oder negativ wird. Es ist daher fa im ersten Falle ein Minimum und im zweiten ein Maximum.

Sollte aber auch $f''a = 0$ werden, so würde:

$$f(a \pm h) = fa \pm \tfrac{1}{6} h^3 f'''a + \tfrac{1}{24} h^4 f^{\text{IV}} \pm \text{ꝛc.},$$

sein, wo in Bezug auf den dritten Differentialcoefficienten, wegen der Verschiedenheit der Zeichen, genau das gilt, was vom ersten Differentialcoefficienten gesagt worden. Die Funktion y wird mithin für $x = a$ weder ein Größtes noch Kleinstes, wenn nicht zu gleicher Zeit auch $f'''a = 0$ ist. Trifft dies aber ein, so ist y ein Maximum oder Maximum, je nachdem $f^{\text{IV}}a$ negativ oder positiv ausfällt. Um also zu untersuchen, ob die Funktion $y = fx$ für irgend einen Werth von x ein Minimum oder Minimum wird, setze man den ersten Differentialcoefficienten $y' = f'x = 0$, und bestimme aus dieser Bedingungsgleichung die Werthe von x. Hierauf substituire man jeden dieser Werthe statt x in die folgenden Differentialcoefficienten $f''x$, $f'''x$ . . . , bis man auf einen kommt, der dabei nicht verschwindet. Für jene Werthe von x, für welche derselbe negativ ausfällt, wird y ein Maximum, und für jene Werthe, für welche er positiv ist, ein Minimum. Uebrigens muß dieser erste nicht Null werdende Differentialcoefficient durchaus von gerader Ordnung sein, widrigenfalls der in Frage stehende Werth weder ein Maximum noch Minimum der vorgelegten Funktion darbietet.

Anmerkung. Aus dem Gesagten ergibt sich von selbst, daß die Funktion mehrere Maxima oder Minima oder auch beide zugleich besitzen könne. Sind diese relativen Maxima und Minima der Funktion bekannt, so kann man leicht aus denselben das absolute Maximum oder Minimum ausscheiden.

§. 71. Wir wollen jetzt unsere vorstehende Regel auf verschiedene Beispiele anwenden.

1. Es sei $y=\sqrt{2px}$. Da $y'=\frac{p}{\sqrt{2px}}$ nicht Null werden kann, so hat die Funktion $\sqrt{2px}$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

2. Für $y=b-(x-a)^2$ hat man $y'=-2(x-a)=0$; woraus $x=a$, $y''=-2$. Die Funktion wird folglich für $x=a$ ein Maximum, und zwar ist dieser größte Werth $=b$, welcher sich übrigens hier von vornherein zu erkennen gibt.

Dagegen erhält die Funktion $y=b+(x-a)^2$ für $x=a$ ein Minimum.

Ueberhaupt entspricht in der Funktion $y'=X(x-a)^n$ für ein ungerades n dem Werthe $x=a$ ein Größtes oder Kleinstes, je nachdem X dadurch negativ oder positiv wird.

3. Man soll die Größe a in zwei solche Theile zerlegen, daß das Produkt der $m$ten Potenz des ersten Theils multiplicirt, mit der $n$ten Potenz des zweiten das größte unter allen ähnlichen Produkten werde. Man hat, wenn der eine Theil mit x und das erwähnte Produkt mit y bezeichnet wird:

$y=x^m(a-x)^n$. Hieraus

$y'=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-x(m+n)]$;

$y''=x^{m-2}(a-x)^{n-2}[m(m-1)(a-x)^2-2mnx(a-x)+n(n-1)x^2]$.

Die erste Derivirte gleich Null gesetzt, gibt:

$$x=0,\ x=a \text{ und } x=\frac{ma}{m+n}.$$

Der letzte dieser Werthe entspricht einem Maximum, welches ist: $m^m\ n^n\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$; die beiden andern geben Minima, wenn m und n gerade sind.

Will man eine Zahl a in solche zwei Theile zerlegen, daß das Produkt derselben ein Größtes werde; so muß man die gegebene Zahl halbiren: es ist nämlich in diesem Falle $m=n=1$.

4. Für welchen Werth von x ist $y=\sqrt[x]{x}$ ein Maximum? Wird $y'=y\cdot\frac{1-lx}{x^2}$ gleich Null gesetzt, so ergibt sich für $x=e$ ein größter Werth, wo e die Basis der Nepper'schen Logarithmen bezeichnet.

5. Unter allen Brüchen denjenigen zu finden, der seine mte Potenz am meisten übertreffe.

Stellt man diesen Bruch durch x dar, so ist $y=x-x^m$. Aus der Bedingungsgleichung $y'=1-mx^{m-1}=0$ folgt $x=\sqrt[m-1]{\frac{1}{m}}$.

6. Man soll die Supplementarsehnen einer Ellipse angeben, welche die größten Winkel unter einander bilden. Bezeichnet man mit a und b die halben Achsen, ferner mit α die Tangente des Winkels, welchen eine dieser Sehnen mit der Achse der x macht; so stellt $\frac{a^2\alpha^2+b^2}{\alpha(a^2-b^2)}$ die Tangente des Winkels unserer Supplementarsehnen dar. (Siehe §. 94 der analytischen Geometrie der Ebene).

Es handelt sich jetzt darum, den constanten Divisor a^2-b^2 bei Seite gesetzt, was hier gestattet ist, die Funktion $y=a^2\alpha+\frac{b^2}{\alpha}$ durch ein passendes α zu einem Maximum zu machen. Die Bedingungsgleichung:

$$y'=a^2-\frac{b^2}{\alpha^2}=0 \text{ liefert } \alpha=\pm\frac{b}{a}.$$

Die fraglichen Supplementarsehnen gehen durch einen Endpunkt der kleinen Achse; ihre durch den Mittelpunkt der Ellipse gelegten Parallelen geben die conjugirten Diameter, die den größtmöglichen Winkel mit einander bilden.

7. Unter allen Dreiecken, welche auf der Basis von einem gegebenen Umfang 2p construirt werden können, dasjenige zu finden, welches den größten Flächeninhalt hat. Es ist, wenn der Inhalt des Dreiecks mit y und eine der unbekannten Seiten mit x bezeichnet wird:

$$y^2=p(p-a)(p-x)(a+x-p).$$

Um y^2 zu einem Maximum zu machen, gehen wir vorerst zu den Logarithmen über, worauf differentiirt wird. Aus der Bedingungsgleichung entsteht dann $x=p-\frac{a}{2}$: das gesuchte Dreieck ist folglich gleichschenklig.

Ueberhaupt hat unter allen Polygonen von einerlei Umfang und einerlei Seitenzahl dasjenige den größten Flächeninhalt, dessen Seiten einander gleich sind. Es sei ABCDE (Fig. 2) ein solches größtes Polygon. Wäre nun nicht AB=BC, so werde das gleichschenklige Dreieck AIC construirt, das mit dem Dreieck ABC gleichen Umfang besitzt. Alsdann $\triangle AIC > \triangle ABC$, woraus AICDE>ABCDE, was der Voraussetzung widerspricht.

8. Unter allen Dreiecken, welche über der Basis AC=a (Fig. 3) dem Kreise, dessen Radius OF=r ist, umgeschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches die kleinste Fläche besitzt. Es sei $AF=AD=x$, mithin $CF=CE=a-x$. Bezeichnet man den Umfang des Dreiecks mit 2p, seine Fläche mit y; so ist $BE=BD=p-a$, ferner nach der bekannten Formel für den Flächeninhalt:

$$y^2=px(p-a)(a-x),$$

oder, wenn man erwägt, daß $y=pr$ ist,

$$yr^2=x(y-ar)(a-x).$$

Die Bedingungsgleichung $y'=0$ liefert uns $x=\frac{1}{2}a$; woraus folgt, daß F die Mitte von AC ist und die beiden andern Seiten gleich sind.

9. In einem parabolischen Segmente, welches durch eine auf die Achse AB normalen Sehne CD (Fig. 4) abgeschnitten ist, das Rechteck zu finden, dessen Umfang ein Maximum ist. Setzt man die Abscisse AB=x, die dazugehörige Ordinate BD=b, ferner AP=x und PM=y; so ist $y^2=\frac{b^2}{a}x$. Für den Umfang z des Rechtecks erhält man

$$z=4y+2(a-x), \text{ oder}$$

$$z=4y+2a-\frac{2a}{b^2}y^2.$$

Aus $z'=0$ folgt $y=\frac{b^2}{a}$. Da $z''=-\frac{4a}{b^2}$,

so ist der Umfang für $y=x=\frac{b^2}{a}$ ein Maximum.

10. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden, die einem gegegebenen Würfel a^3 gleich sind und die Linie b zur Kante haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat. Es seien x und z die beiden andern Kanten, mithin $bxz=a^3$; wonach b, x und $\frac{a^3}{bx}$ die Dimensionen des Parallelepipeds sind. Für die Oberfläche y des Parallelepipeds entsteht dann:

$$y=\frac{2a^3}{b}+2bx+\frac{2a^3}{x}.$$

Aus $y'=0$ folgt $x=z=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

Im Fall die Linie b nicht gegeben wäre, sind, wenn eine der drei Kanten mit x bezeichnet wird, die beiden andern Kanten jede $y=\sqrt{\frac{a^3}{x}}$. Hieraus die Oberfläche:

$$y=\frac{2a^3}{x}+4\sqrt{a^3x}.$$

Die Bedingungsgleichung $y'=0$ gibt $x=a$; d. h. der Würfel hat die kleinste Fläche.

11. Für die Funktion $y=\frac{x}{1+x^2}$ erhält man:]

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ y''=-2x\,\frac{1+2y'(1+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Aus der Bedingungsgleichung $y'=0$ entspringt $x=\pm 1$. Der zweite Differentialcoefficient y'' wird für $x=1$ negativ und für $x=-1$ positiv; mithin ist im ersten Fall $y=\frac{1}{2}$ ein Maximum, und im zweiten $y=-\frac{1}{2}$ ein Minimum oder vielmehr ein negatives Maximum, indem unserer Uebereinkunft gemäß diejenigen Größen als kleiner anzusehen sind, welche mehr nach dem negativen Unendlichen hin zu liegen.

12. Für $y=\frac{x^3-x}{x^4-x^2+1}$ hat man $y'=-\frac{x^6+2x^4+2x^2+1}{(x^4-x^2+1)^2}$,

$$y''=\frac{2x^9-6x^7-18x^5+20x^3}{(x^4-x^2+1)^3}.$$

Aus $y'=0$ folgt die Gleichung $x^6-2x^4-2x^2+1=0$, aus welcher sich die reellen Werthe:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ergeben. Die beiden ersten Werthe liefern für y das Maximum $= \frac{1}{2}$ und die beiden andern das Minimum $= -\frac{1}{2}$.

Anmerkung. Bei gebrochenen Funktionen, wo der zweite Differentialcoefficient meistens schon etwas zusammengesetzt ausfällt, kann man sich die mit diesem Coefficienten anzustellende Untersuchung auf folgende Weise erleichtern. Es sei nämlich die gegebene Funktion $y = \frac{P}{Q}$, wo P und Q Funktionen von x bezeichnen.

Durch Differentiation entsteht:

$$y' = \frac{QP' - P'Q}{Q^2}, \text{ und } y'' = \frac{Q(QP'' - PQ'') - 2Q'(QP' - PQ')}{Q^3},$$

welche letztere, mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung $y' = 0$ in $y'' = \frac{QP'' - PQ''}{Q^2}$ übergeht. Hiernach hängt die Bestimmung des Zeichens für die in Rede stehenden Werthe von x von jener weit einfachern Größe $QP'' - PQ''$ ab.

§. 72. Wie man bei noch unentwickelten Gleichungen zu verfahren hat, wird sich sofort aus folgenden Beispielen ergeben:

1. Es sei $y^2 - 2mxy + x^2 = a^2$. Man hat:

$$y'(y - mx) = my - x, \quad y''(y - mx) = 2my' - y'^2 - 1.$$

Setzt man $y' = 0$, so ist $my - x = 0$. Verbindet man diese letztere Gleichung mit der ursprünglich gegebenen, so findet man:

$$x = \frac{\pm ma}{\sqrt{(1-m)^2}}, \quad y = \frac{\pm a}{\sqrt{(1-m)^2}}.$$

Diese Werthe in das zweite Differential der gegebenen Gleichung eingeführt, liefern $y'' = \frac{\mp 1}{a\sqrt{(1-m)^2}}$. Mithin ist von den oben für y gefundenen Werthen der eine ein Größtes, der andere ein Kleinstes.

2. Die Gleichung $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ gibt:

$$y'(y^2 - ax) = ay - x^2, \quad y''(y^2 - ax) = 2(ay' - x - yy'^2).$$

Aus $y' = 0$ entspringt $ay - x^2 = 0$, woraus für $x = a\sqrt[3]{2}$ das Maximum $y = a\sqrt[3]{4}$ folgt.

§. 73. Sind die Entwicklungen von $f(a \pm h)$ in denjenigen Gliedern, zu denen man seine Zuflucht zu nehmen hat, um die Existenz des Maximum's oder Minimum's zu erkennen, unbrauchbar; so muß man jene Entwicklungen auf anderm Wege bewerkstelligen und sehen, ob sie in der That beide gleichzeitig größer oder kleiner als fa sind.

1. Für $y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}}$ hat man $y' = \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}$. Aus $y' = 0$ folgt $x = a$, wodurch y'' unendlich wird; die Taylor'sche Formel ist daher nicht mehr brauchbar. Da man auf gewöhnlichem Wege $f(a \pm h) = b \pm h^{\frac{5}{3}}$ findet, so hat die Funktion weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

2. Für $y = b + (x-a)^{\frac{4}{3}}$ findet man $f(a+h) = b + h^{\frac{4}{3}} = f(a-h)$. Dem Werthe $x = a$ entspricht folglich das Minimum $Y = b$. Die Gleichung $y = b - (x-a)^{\frac{4}{3}}$ liefert hingegen ein analoges Maximum.

Anmerkung. Betrachten wir die Entwicklung von $f(a+h)$ in ihrer allgemeinsten Gestalt, nämlich:

$$Y = y + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \text{ꝛc.},$$

wo die Exponenten ganz oder gebrochen sind, allein, vom kleinsten an nach ihrer Größe fortschreiten. Hieraus ergibt sich sofort für die Entwicklung von $f(a-h)$, wenn man darin h mit $-h$ vertauscht, die Reihe:

$$Y_1 = y + A(-h)^{\alpha} + B(-h)^{\beta} + \text{ꝛc.}$$

Für die Unterschiede zwischen y, Y und Y_1 hat man daher:

$$Y - y = Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \text{ꝛc.},$$

$$Y_1 - y = A(-h)^{\alpha} + B(-h)^{\beta} + \text{ꝛc.}$$

Beide Resultate müssen negativ, wenn y ein Maximum, und positiv sein, wenn es ein Minimum werden soll, wie klein man auch h nehmen mag: Ah^{α} und $A(-h)^{\alpha}$ müssen daher einerlei Vorzeichen haben, was, wegen der Unveränderlichkeit von A, nur dann stattfinden kann, falls α eine gerade Zahl oder ein solcher Bruch ist, der einen geraden Zähler hat.

§. 74. Um die bei einer Funktion von zwei Veränderlichen stattfindenden Maxima und Minima zu bestimmen, befolgen wir eine

der im §. 70 vorkommenden analoge Schlußweise. Es sei nämlich $z = f(x, y)$ eine Funktion der beiden von einander unabhängigen veränderlichen Größen x, y. Vertauschen wir darin x und y mit $x+h$ und $y+k$, indem wir nach den steigenden Potenzen von h und k nach der im §. 51 gegebenen Vorschrift entwickeln; so haben wir, wenn $k = \alpha h$ gesetzt und der Kürze halber $f(x+h, y+k)$ durch Z bezeichnet wird:

$$Z = z + h\left(\frac{dz}{dx} + \alpha \frac{dz}{dy}\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2z}{dy\,dx} + \alpha^2 \frac{d^2z}{dy^2}\right) \ldots$$

Damit nun z ein Maximum oder Minimum werde, muß der Coefficient von h, wie klein man auch h und k nehmen mag, abgesehen von α, verschwinden, was uns die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0 \ldots (1) \text{ liefert,}$$

aus welchen die Werthe von x und y zu suchen sind. Diese Werthe müssen, wenn sie Größte oder Kleinste geben sollen, dem Ausdrucke

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2z}{dy\,dx} + \alpha^2 \frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

immer dasselbe Zeichen verschaffen und zwar ein negatives im Falle des Größten und ein positives im Falle des Kleinsten, welchen Werth man auch dem α beilegen mag. Dieses kann aber, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, nur alsdann statt finden, wenn die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2z}{dy\,dx} + \alpha^2 \frac{d^2z}{dy^2} = 0 \text{ durch die aus } \frac{dz}{dx} = 0, \frac{dz}{dy} = 0$$

erhaltenen Werthe von x und y imaginäre Wurzeln, für α gibt. Hieraus folgt, daß die aus den Gleichungen (1) gefundenen Werthe von x und y nur dann einem Größten und Kleinsten entsprechen, wenn zu gleicher Zeit

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0 \ldots (2)$$

ist, was zunächst erheischt, daß $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ einerlei Zeichen haben.

Wenn mit $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$ zugleich der Ausdruck, welcher die Differentialcoefficienten der zweiten Ordnung enthält, verschwindet; so findet kein Größtes oder Kleinstes statt, insofern nicht zu gleicher

Zeit die Summe der Glieder, welche die Differentialcoefficienten der dritten Ordnung enthalten, verschwindet u. s. w.

Anmerkung. Euler stellt in seiner Differentialrechnung als unterscheidendes Merkmal des Maximum's und des Minimum's nur die erste Bedingung auf, nämlich, daß $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ einerlei Zeichen haben sollen, indem er auf die Bedingung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > 0$$

keine Rücksicht nimmt. Lagrange machte zuerst auf die Nothwendigkeit der letztern Bedingung aufmerksam, worauf Français diese Theorie durch die Betrachtung des Falles:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2$$ vervollständigte.

Das Trinom $\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2z}{dy\,dx} + \alpha^2 \frac{d^2z}{dy^2}$

behält nämlich immer dasselbe Zeichen für alle Werthe von α, wenn, nachdem es gleich Null gesetzt worden, gleiche Werthe für α liefert, d. h. wenn:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2.$$

Wir hätten hiernach, Alles kurz zusammengefaßt, folgende Regel: Sind $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ zugleich positiv und überdieß

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2$$

positiv oder Null für die aus den Gleichungen (1) gefundenen Werthe von x und y; so ist z für dieselben ein Kleinstes. Sind aber $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ gleichzeitig negativ und dabei

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}\right)^2$$

positiv oder Null; so wird z für jene Werthe von x und y ein Größtes.

§. 75. Wir wollen nun unsere Regel auf einige Beispiele anwenden.

1. Für welche Werthe von x und y wird $z=x^2+y^2-6xy+32y$ ein Maximum oder Minimum? Aus $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$ folgt $x=6$ und $y=2$. Für diese Werthe wird aber:

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2=-32:$$

folglich besitzt die vorliegende Funktion weder ein Maximum noch ein Minimum.

2. Die Zahl a in drei solche Theile x, y, $a-x-y$ zu zerlegen, daß deren Produkt z ein Maximum wird. Man hat $z=xy(a-x-y)$.

Aus den Bedingungsgleichungen $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$ ergibt sich $x=\frac{a}{3}$ und $y=\frac{a}{3}$.

Werden diese Werthe in die Ausdrücke von

$\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ substituirt, so haben wir

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{2a}{3},\ \frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{2a}{3},\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=-\frac{a}{3};$$

mithin auch $\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2=\frac{a^2}{3}$. Es ist folglich z ein Größtes, wenn man die drei Theile einander gleich nimmt.

3. Dasjenige Dreieck anzugeben, welches bei einem gegebenen Umfange 2p den größten Flächeninhalt hat. Ist x die eine, y die zweite, mithin $2p-x-y$ die dritte Seite und z der Flächeninhalt des Dreiecks; so hat man bekanntlich:

$$z=\sqrt{[p(p-x)(p-y)(x+y-p)]}.$$

Aus den zwei Bedingungsgleichungen folgt $x=y=\frac{2p}{3}$. Das Dreieck, dessen Fläche bei gegebenem Umfange ein Größtes oder Kleinstes ist, muß daher gleichseitig sein. Um zu entscheiden, welches von beiden hier stattfindet, substituire man in die zweiten Differentialcoefficienten die gefundenen Werthe von x und y.

Man erhält dadurch:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{3}{\sqrt{3}},\ \frac{d^2z}{dy^2}=-\frac{3}{\sqrt{3}},\ \frac{d^2z}{dx\,dz}=-\frac{3}{2\sqrt{3}},$$

also . . . . $\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > 0$:

die betreffende Fläche ist daher ein Maximum.

4. Die kürzeste Entfernung zwischen zwei gegebenen Geraden zu finden. Es mögen $z=ax+\alpha$, $y=bx+\beta$ die Gleichung einer dieser Linien sein, während die andere als Abscissenachse gilt. Nehmen wir auf der letztern einen Punkt, dessen Abscisse x' ist; so wird seine Entfernung R von einem beliebigen Punkte der zweiten durch die Gleichung:

$$R^2=(x-x')^2+y^2+z^2 \text{ oder } R^2=(x-x')^2+(bx+\beta)^2+(ax+\alpha)^2$$

bestimmt. Das zweite Glied der letztern Gleichung durch t darstellend, haben wir:

$$\frac{dt}{dx}=2(x-x')+2(bx+\beta)b+2(ax+\alpha)a=0,$$

$$\frac{dt}{dx'}=-2(x-x')=0; \text{ woraus } x=x'=-\frac{a\alpha+b\beta}{a^2+b^2}.$$

Die Gleichung lehrt, daß die gesuchte Linie auf der Achse der x senkrecht steht: mithin ist sie es auch auf der zweiten Geraden, welche man ebenfalls zur Abscissenachse hätte wählen können; was uns schon aus den Elementen der Geometrie bekannt ist. Uebrigens ist

$$\frac{d^2t}{dx^2}=2(1+a^2+b^2), \quad \frac{d^2t}{dx'^2}=2, \quad \frac{d^2t}{dx\,dx'}=-2;$$

woraus hervorgeht, daß hier ein Maximum stattfindet, dessen Werth

$$R=\frac{a\beta-b\alpha}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ ist.}$$

Die Gleichung der Projection der gesuchten Linie auf der Ebene yz ist $y=Az$. Da diese Linie durch den Punkt (x, y, z) der zweiten Geraden geht, so hat man:

$$A=\frac{y}{z}=\frac{bx+\beta}{ax+\alpha}=-\frac{a}{b};$$

woraus hervorgeht, daß unsere beiden Geraden auf einander senkrecht stehen.

Methode der Tangenten.

§. 76. Wir wollen jetzt die Gleichung der durch den Punkt M(xy) einer Curve BMM′ (Fig. 1), deren Gleichung $y=fx$ ist, gezogenen Tangente angeben. Die Gleichung der Geraden TMH ist:

$$Y-y=\text{tang}\,\alpha\,(X-x),$$

wo X, Y die Coordinaten der beliebigen Punkte der Geraden, x und y diejenigen des Berührungspunktes M und α der Winkel, welchen diese Gerade mit der Abscissenachse macht, bezeichnen. Nach dem im §. 2 Gesagten ist die Derivirte $y'=f'x$ die trigonometrische Tangente des Winkels α oder die Grenze des Verhältnisses der Zuwachse MQ und M′Q der Coordinaten x und y. Die Differentialrechnung löst also vermöge ihres Grundprincips das Problem der Tangenten direct auf, wenn die Gleichung der krummen Linie gegeben ist und man hat:

$$\text{tang}\,\alpha=y',\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}},\ \sin\alpha=\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}},\ Y-y=y'(X-x).$$

1. Die Gleichung der Normale MN, d. h. der Linie, welche auf der Tangente senkrecht steht und durch den Punkt M geht, ist hiernach:

$$(Y-y)y'+X-x=0.$$

2. Macht man in diesen Gleichungen $Y=0$, um die Durchschnittspunkte der beiden Geraden mit der Achse der x zu bestimmen; so zieht man daraus: $x-X=$ Subtangente $TP=\frac{y}{y'}$, und Subnormale $PN=yy'$.

Haben die letztern Werthe ein negatives Zeichen, so erhalten die in Frage stehenden Linien eine entgegengesetzte Richtung von derjenigen, welche unsere Figur angibt: um die Lage jener Linien näher zu bestimmen, ist es hinreichend, zu untersuchen, ob y oder y′ negativ ist.

3. Die Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke TMP und PMN liefert:

$$\text{Tangente } TM=\frac{y}{y'}\sqrt{(1+y'^2)},$$

$$\text{Normale } MN=y\sqrt{(1+y'^2)}.$$

4. In dem Fall, daß der Coordinatenwinkel φ kein Rechter ist, wird man für die Gleichung der Berührungslinie und den Werth der Subtangente die nämlichen Ausdrücke, wie oben, erhalten; nur ist dann $y' = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$, wo α wieder den Winkel darstellt, welchen die durch den Punkt (x, y) der gegebenen Curve gezogenen Tangente mit der Richtung der positiven Abscissen macht.

Anmerkungen: 1. An denjenigen Stellen der Curve, deren Abscissenwerthe $y'=0$ machen, läuft die Berührungslinie zur Abscissenachse parallel, während an denjenigen Stellen, deren Abscissenwerthe y' auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, die Tangente senkrecht auf der Abscissenachse steht.

2. In den Ausdrücken für die Tangente und Normale, welche Linien jederzeit als positiv zu betrachten sind, nimmt man die Quadratwurzeln positiv oder negativ, je nachdem der rationale Faktor positiv oder negativ ist.

§. 77. Es folgen nun einige Anwendungen der vorhergehenden Formeln:

1. Für die Parabel $y^2=2px$ findet man:

Subtangente $=2x$, Subnormale $=p$,

Tangente $=\frac{y}{p}\sqrt{(p^2+y^2)}$, Normale $=\sqrt{(p^2+y^2)}$, $\tang\alpha=\frac{p}{y}$.

2. Für die Ellipse und Hyperbel $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$ erhält man $y' = \frac{\mp b^2x}{a^2y}$. Hieraus zieht man für die Länge N der Normalen, wenn $c^2=a^2\mp b^2$ gesetzt wird:

$$N=\frac{b\sqrt{[\pm(a^4-c^2x^2)]}}{a^2}.$$

3. Für $y^m=x^n a^{m-n}$, welche Gleichung der Familie der Parabeln angehört, hat man $\frac{y}{y'}=\frac{mx}{n}$. Ebenso erhält man für die Gleichung $y^mx^n=a^{m+n}$, welche das Geschlecht der Hyperbeln darstellt, $\frac{y}{y'}=-\frac{mx}{n}$. Abgesehen vom Zeichen, stimmt das Resultat mit dem vorigen überein.

4. In der Curve, deren Gleichung $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ ist, hat man $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$. Daher die Subtangente $= \frac{y^3 - axy}{ay - x^2}$, welcher Werth leicht construirt werden kann, wenn der von x angegeben und darnach jener von y bestimmt worden.

5. In der logarithmischen Linie $y = a^x$ hat man $\frac{y}{y'} = \frac{1}{la}$: Die Subtangente ist demnach gleich dem Modul.

6. Setzen wir $AP = x$, $PM = y$, $QM = z = \sqrt{(2ry - y^2)}$ (Fig. 5); so erhalten wir für die Cycloide AMF die Gleichung:

$$x = \text{arc}(\sin = z) - z,$$

wobei der Bogen in dem Erzeugungskreise, dessen Radius $= r$, genommen ist. Durch Differentiation entsteht:

$$1 = \frac{rz'}{\sqrt{(r^2 - z^2)}} - z', \text{ in welcher Gleichung } z' = \frac{(r-y)y'}{\sqrt{(2ry - y^2)}}.$$

Indem wir z und z' eliminiren, finden wir $y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)}$: der Ursprung liegt hier in dem Punkt A, wo der beschreibende Punkt M sich in der Linie AA'' befand, über welche der Erzeugungskreis hinrollt. Hieraus entspringt für die Subnormale

$$yy' = \sqrt{(2ry - y^2)} = z = MQ,$$

was sich auf eine leichte Art construiren läßt. Denn sieht man $PM = y$ in dem Erzeugungskreise als die Abscisse DQ an, so ist der obige Werth der Subnormale gerade derjenige der Ordinate MQ jenes Kreises; die Normale fällt daher mit der Sehne des Bogens MD zusammen, wie sich auch aus dem Ausdrucke der Normale $y\sqrt{(1 + y'^2)} = \sqrt{(2ry)}$ ergibt. Die Supplementarsehne MG stimmt folglich mit der Tangente unserer Curve überein. Um durch einen gegebenen Punkt M an die Cycloide eine Tangente zu ziehen, wird man also MN parallel zur Achse AE legen, in dem festen Kreise FKE nachher die Sehne KF ziehen, und endlich derselben MG parallel führen.

Bringt man den Ursprung nach F, den höchsten Punkt der Cycloide und nimmt $FS = x$, $SM = y$; so ist die ursprüngliche Gleichung der Cycloide:

$x = \text{arc}(\sin = z) + z$ und ihre Differentialgleichung: $y' = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}$,

welche letztere man auch durch bloße Vertauschung von x mit $\pi r - x$ und y mit $2r - y$ gefunden haben würde.

§. 78. Es lassen sich ohne Schwierigkeit verschiedene Probleme in Bezug auf die Tangenten lösen, wie z. B. durch einen außerhalb der Curve gegebenen Punkt an dieselbe eine Tangente legen, oder solche in einer bestimmten Richtung führen, u. s. w.

Hier wollen wir nun einen Ausdruck für den Winkel β auffinden, welchen die Berührungslinie TM (Fig. 6) mit dem Leitstrahle AM bildet, d. h. mit der den Ursprung und den Berührungspunkt verbindenden Geraden. Für den Winkel ϑ, welchen dieser Leitstrahl mit der Abscissenachse macht, hat man $\tang \vartheta = \frac{y}{x}$; außerdem ist

$$\tang \alpha = y'; \text{ folglich } \tang(\alpha - \vartheta) = \tang \beta = \frac{y'x - y}{x + yy'}.$$

In der Anwendung darf nicht unterlassen werden, auf das Vorzeichen dieses Bruches gehörige Rücksicht zu nehmen. Für den Kreis $y^2 + x^2 = r^2$ findet man $\tang \beta = \frac{1}{0}$, wie es zu erwarten war.

§. 79. Wird eine Curve BM (Fig. 6) auf Polarcoordinaten $AM = u$, $MAP = \vartheta$ bezogen; so können die vorhergehenden Formeln nur erst nach einer vorläufigen Verwandlung der Polarcoordinatengleichung $u = f\vartheta$ der Curve in eine Parallelcoordinatengleichung eine Anwendung finden, wobei bekanntlich die Relationen bestehen:

$$x = u \cos \vartheta, \quad y = u \sin \vartheta, \quad x^2 + y^2 = u^2.$$

Drücken wir dagegen den Werth für $\tang \beta$ in u und ϑ aus und nehmen ϑ statt x zur unabhängigen Veränderlichen, so haben wir nach dem im §. 37 Gesagten:

$$\tang \beta = \frac{u}{u'}.$$

Auf dieselbe Art könnte man die Werthe von $y y'$, $\frac{y}{y'}$ u. s. w. durch u, u' und ϑ ausdrücken; wegen ihrer zusammengesetzten Form gibt man jedoch folgendem Verfahren den Vorzug.

Man nennt nämlich hier Subtangente, das Stück AT der durch A auf dem Leitstrahl AM errichteten Senkrechten zwischen dem Pol

und Durchschnitt der Berührungslinie, und Subnormale das zwischen Pol und Normale liegende Stück AN. Die Ausdrücke für die Subtangente und Subnormale für irgend einen Punkt M der Polarcurve sind hiernach:

$$\text{Subtangente } AT = \frac{u^2}{u'}, \text{ Subnormale } AN = u'.$$

Anmerkungen: 1. Aus der obigen Erklärung geht hervor, daß die Subtangente und Subnormale bei Polarcoordinaten nicht mehr, wie solches bei Parallelcoordinaten der Fall ist, eine unveränderliche Lage behalten, sondern dieselbe für jeden Punkt der Curve eine andere ist.

2. Sehr einfach ergeben sich auch die Formeln für die Tangente und Normale, nämlich:

$$\text{Tangente } MT = u\sqrt{\left(1 + \frac{u^2}{u'^2}\right)}, \text{ Normale} = \sqrt{(u^2 + u'^2)}.$$

§. 80. Einige Beispiele hierüber.

1. Für die Archimedische Spirale ist:

$$u = \frac{a\vartheta}{2\pi}, \text{ mithin } \frac{u^2}{u'} = \vartheta u, \quad \frac{u}{u'} = \vartheta.$$

Die Subtangente AT ist daher der Länge nach dem mit dem Radius $AM = u$ beschriebenen Kreisbogen gleich, welcher den Winkel $MAx = \vartheta$ mißt. Was den Winkel β anbelangt, so wächst derselbe fortwährend mit dem Bogen ϑ und zwar dient ihm der rechte Winkel als Grenze, indem erst nach einer unendlichen Anzahl von Umdrehungen des Leitstrahls jener Bogen ϑ unendlich wird.

2. Für die hyperbolische Spirale hat man:

$$u = \frac{a}{\vartheta}; \text{ mithin Subtangente} = -a, \ \operatorname{tang}\beta = -\vartheta.$$

Die Subtangente ist daher constant; der Winkel des Leitstrahls mit der Tangente ist stumpf, und nimmt in dem Maß ab als ϑ wächst.

3. Für die logarithmische Spirale ist $u = a^{\vartheta}$; also

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{la}, \text{ Subtangente} = \frac{u}{la}.$$

Die Curve schneidet folglich alle Leitstrahlen unter einerlei Winkel, der 45^0 beträgt, wenn a die Basis der Nepper'schen Logarithmen ist; ferner wächst die Subtangente proportional zum Leitstrahl.

4. Aus der Geichung:

$$\vartheta = \frac{\sqrt{(u^2-a^2)}}{a} - \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\sqrt{(u^2-a^2)}}{a}\right) \text{ findet man}$$

$$\text{die Polarsubtangente} = u\,\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a},$$

$$\text{die Polarsubnormale} = \frac{au}{\sqrt{(u^2-a^2)}},$$

die trigonometrische Tangente des Winkels der Normale mit dem Leitstrahl

$$= \frac{a}{\sqrt{(u^2-a^2)}}.$$

Das Differential des Bogens einer Curve und der von derselben begrenzten Fläche.

§. 81. Ist die Gleichung $y = fx$ einer Curve BMM' (Fig. 1) gegeben, so ist die Länge $BM = s$ eines Bogenstücks bestimmt, wenn dessen Endpunkte B und M bekannt sind. Um diese Länge zu finden, bemerken wir, daß, der Punkt B als fest angenommen, s sich mit dem Punkte M ändert; es ist demnach $s = Fx$, wo Fx eine unbekannte, noch zu bestimmende Funktion von x bezeichnet.

Lassen wir x um die Größe $h = PP'$ wachsen, wobei y in $y+k$ und s in $s+l$ übergeht; so haben wir:

$$f(x+h) = y + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 + \text{ etc., und}$$

$$F(x+h) = s + s'h + \tfrac{1}{2}s''h^2 + \text{ etc. Hieraus:}$$

$$k = y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 + \ldots \text{ u. } l = s'h + \tfrac{1}{2}s''h^2 + \ldots$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke $MM'Q$ folgt:

$$\text{Sehne } MM' = \sqrt{(h^2+k^2)} = h\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+)} \text{ etc.}$$

Durch die Betrachtung der Tangente MH haben wir ferner:

$$QH = y'h,\ MH = h\sqrt{(1+y'^2)},\ M'H = -\tfrac{1}{2}y''h^2 \ldots; \text{ folglich:}$$

$$\frac{\text{Sehne } MM'}{MH + M'H} = \frac{\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+ \ldots}}{\sqrt{(1+y'^2)} - \tfrac{1}{2}y''h \ldots}.$$

Bei der unendlichen Abnahme von h nähert sich das letzte Verhältniß ohne Ende der Einheit, welche daher auch die Grenze des

ersten Gliedes sein wird. Es liegt aber der Bogen MM' zwischen seiner Sehne und der gebrochenen Linie $MH+M'H$; mithin ist auch die Einheit die Grenze des Verhältnisses der Sehne zum Bogen, oder von

$$\frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}=\frac{\sqrt{(1+y'^2+y'y''h+\ldots)}}{s'+\frac{1}{2}s''h+\ldots}.$$ Hieraus entspringt:

$$1=\frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{s'},\ \text{oder}\ ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)},\ \text{weil}\ s'=\frac{ds}{dx}.$$

Mit Hülfe dieser Formel können wir die Länge jedes Bogens einer Curve angeben, oder, wie man sich auszudrücken pflegt, die Curve rectificiren. Wir brauchen deshalb nur in den allgemeinen Ausdruck von s' statt y' seinen aus der gegebenen Gleichung $y=fx$ der Curve abgeleiteten Werth von $f'x$ zu substituiren, und dann zu integriren, d. h. von dem Differentialausdruck ds zu dem ursprünglichen Ausdruck s, nämlich jenem Ausdruck, durch dessen Differentiation ds entstanden ist, zurückzugehen.

Beispiel. Für den Kreis $x^2+y^2=r^2$ hat man:

$$ds=\frac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}:$$

dies ist das gesuchte Differential des Bogens eines Kreises. Um den primitiven Ausdruck zu erhalten, bemerken wir, daß

$$d\cdot r\,\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{r}\right)=\frac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

Hieraus entsteht für die Länge s eines Kreisbogens, zu welchem die Abscisse x gehört:

$$s=r\cdot\text{arc}\left(\sin=\frac{x}{r}\right),$$

was schon aus den Elementen der Geometrie bekannt ist. Macht man in dem letzten Ausdrucke $x=0$ und dann $x=r$, so findet man für die Länge des Quadranten $\frac{1}{2}r\pi$, was ebenfalls bekannt ist. Es ist jedoch nicht immer so leicht, den ursprünglichen Ausdruck von ds anzugeben; wie man sich alsdann zu verhalten habe, werden wir später sehen.

Mit Hülfe des Werthes von s' lassen sich die im §. 76 aufgestellten Formeln vereinfachen; wir erhalten nämlich:

$$\cos\alpha = \frac{1}{s'} = \frac{dx}{ds},\ \sin\alpha = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\text{Tangente} = \frac{ys'}{y'} = \frac{yds}{dy},\ \text{Normale} = ys' = \frac{yds}{dx}.$$

§. 82. Um die Fläche BCPM$=t$ (Fig. 1), welche zwischen den Ordinaten CB, MP und dem Bogen BM einer Curve enthalten ist, zu finden, setzen wir $t=\varphi x$, wo φx eine noch unbestimmte Funktion der Abscisse x sein soll. Lassen wir die Abscisse um h wachsen, so geht die Ordinate y in $y+k$ und die Fläche in $t+i$ über, und wir haben:

$$k = M'Q \quad = y'h + \text{etc.},$$
$$i = MPP'M' = t'h + \text{etc.}$$

Nun ist Rechteck MPP'Q$=yh$ und Rechteck LPP'M'$=(y+k)h$, so daß sich die Einheit als Grenze ihres Verhältnisses $\frac{y}{y+k}$ ergibt. Da das krummlinige Trapez MPP'M'$=i$ immer zwischen den vorerwähnten Rechtecken liegt, so hat sein Verhältniß zu einem dieser Rechtecke oder der Ausdruck $\frac{y}{t'+\frac{1}{2}t''h+\ldots}$ auch die Einheit zur Grenze; d. h. es ist $t'=y$ oder $dt=ydx$. Um also jede zu einer gewissen Abscisse x gehörige Fläche anzugeben, oder wie man sagt, die Curve zu quadriren, wird man in die letzte Formel statt y seinen Werth fx setzen und dann die primitive Funktion der Differentialgleichung $dt=fxdx$ aufsuchen.

Im Fall der Coordinatenwinkel α ein schiefer ist, würde man finden:
$$t' = y\sin\alpha.$$

Beispiel. Für die gewöhnliche Parabel hat man $y^2=2px$. Dies gibt die Differentialgleichung $dt=dx\sqrt{(2px)}$, für deren primitiven Ausdruck man findet:

$$t = \tfrac{2}{3}\sqrt{(2px^3)} = \tfrac{2}{3}xy,$$

so daß das Flächenstück MAM' (Fig. 7) den $\frac{2}{3}$ten Theil des umgeschriebenen Rechtecks NMM'N' beträgt. Für das zwischen den Ordinaten CB und MP enthaltene Flächenstück CBMP$=t$ bekommt man, wenn AB$=a$ und CB$=b$ gesetzt wird: $t=\frac{2}{3}(xy-ab)$, wonach die Fläche CC'M'M den $\frac{2}{3}$ten Theil von der Differenz der Rechtecke N'M und D'C ausmacht.

§. 83. Da öfters auch die Fläche des zwischen zwei Leitstrahlen AM und AK enthaltenen Sectors AKM (Fig. 6) vorkommt, von welchen Leitstrahlen der letzte als fest zu betrachten ist, während der andere sich mit dem Punkte M ändert; so wollen wir noch das Differential dieser Fläche τ aufsuchen. Es ist:

$$AKM = \tau = ABMK - ABM.$$

Man hat aber:

$$ABM = ABCD + DCMP - AMP = ABCD + t - \tfrac{1}{2}xy; \text{ folglich:}$$

$$\tau = ABMK - ABCD - t + \tfrac{1}{2}xy.$$

Indem wir die letzte Gleichung differentiiren und dabei die Flächenstücke ABMK und ABCD als constant ansehen, was, bei der festen Lage der Punkte B, C und K, wo der veränderliche Punkt M auch liegen mag, gestattet ist, finden wir:

$$\tau' = -t' + \tfrac{1}{2}(xy' + y) = \tfrac{1}{2}(xy' - y),$$

wenn wir erwägen, daß $t' = y$.

Um die Werthe von s' und τ' in Polarcoordinaten u und ϑ auszudrücken, setzen wir vorerst nach §. 36 statt s', y' und τ' bezüglich $\frac{s'}{x'}$, $\frac{y'}{x'}$, und $\frac{\tau'}{x'}$. Es entsteht dadurch:

$$s'^2 = x'^2 + y'^2, \quad \tau' = \tfrac{1}{2}(xy' - yx'),$$

wo die unabhängige Veränderliche noch unbestimmt ist. Damit ϑ diese Veränderliche werde, brauchen wir blos in den letzten Ausdrücken für x, y, x' und y' ihre in §. 37 aufgestellten Werthe zu setzen, wodurch wir bekommen:

$$s' = \sqrt{(u^2 + u'^2)}, \quad \tau' = \tfrac{1}{2}u^2.$$

Es sind dies die Differentiale des Bogens und der Fläche der auf ein Polarcoordinatensystem bezogenen Curve $u = f\vartheta$. Uebrigens hätte man diese Ausdrücke auch direct mittelst der Grenzmethode erhalten können.

Beispiele: 1. Für die Logarithmische Spirale AMD (Fig. 8); deren Gleichung $\vartheta = lu$ ist, findet man das Differential der Bogenlänge $ds = du\sqrt{2}$; mithin $s = u\sqrt{2}$, wo der Bogen im Pol seinen Anfang hat. Hieraus folgt, daß der Bogen s der logarithmischen Spirale, ohnerachtet dieselbe nach unendlich vielen Windungen erst den Pol erreicht, der Diagonale des aus dem begrenzenden Leitstrahl AM construirten Quadrats gleich ist.

Anmerkung. Nimmt man die allgemeinere Gleichung der logarithmischen Spirale $u=a^{\vartheta}$, so findet man für die Länge des Bogens $s=u\frac{\sqrt{1+l^2a}}{la}$.

2. Für die Fläche τ der Archimedischen Spirale (Fig. 9), wo die Gleichung $2\pi u=\vartheta$ besteht, findet man $\tau=\frac{\vartheta^3}{24\pi^2}$. Nach einer vollen Umdrehung des Leitstrahls oder für $\vartheta=2\pi$, ist die Fläche $AIO=\frac{1}{3}\pi$, nämlich dem dritten Theil der Kreisfläche, deren Halbmesser $AI=1$ ist, gleich.

Anmerkung. Nach zwei Umdrehungen ist $\tau_2=8\cdot\frac{\pi}{3}$. Ueberhaupt ist nach der nten Drehung $\tau_n=n^3\cdot\frac{\pi}{3}$ und nach der (n+1)ten Drehung $\tau^{n+1}=(n+1)^3\cdot\frac{\pi}{3}$.

Folglich ist die Fläche, welche zunächst noch zu den vorhergehenden hinzukommt, gleich:

$$\tau^{n+1}-\tau^n=\tfrac{1}{3}\pi\left[(n+1)^3-n^3\right].$$

Von den Osculationen.

§. 84. Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt M einer Curve BMZ (Fig. 10) an dieselbe die Tangente TM und die Normale MN, beschreiben wir dann aus den verschiedenen Punkten a, b . . . der Normale als Mittelpunkte Kreislinien, welche sämmtlich durch den Punkt M gehen; so wird die in diesem Punkte an die Curve gezogene Tangente MT zugleich eine gemeinschaftliche Tangente an alle diese Kreise sein. Unter diesen unzähligen Kreisen muß es offenbar einen geben, welcher sich inniger an die Curve als alle übrigen anschließt. Dieser Kreis heißt der osculatorische Kreis, sein Centrum D der Krümmungsmittelpunkt und sein Radius DM der Krümmungshalbmesser. Dieser Mittelpunkt und Halbmesser ändern sich, wenn man von einem Punkt der Curve zu einem andern übergeht; der Inbegriff aller solchen Punkte bildet wieder eine andere Curve IOD, welche man die Evolute oder Abgewickelte

der gegebenen Curve BMZ nennt, während die letztere wieder die Evolvente oder Abwickelnde heißt.

Um den Osculationskreis für einen gegebenen Punkt M einer Curve zu finden, brauchen wir blos die Bedingungen, wodurch er bestimmt wird, in der Sprache der Analysis auszudrücken. Die Sache unter einen allgemeinen Gesichtspunkt stellend, betrachten wir zwei einander schneidende Curven, deren Gleichungen sein sollen:

$$y = fx\,,\ Y = FX.$$

Haben beide Curven einen Punkt gemein, so ist daselbst $x = X$ und $y = Y$. Um den Lauf unserer zwei Linien in der Gegend jenes gemeinsamen Punktes zu vergleichen, setzen wir $x + h$ statt x und X in y und Y, wodurch wir für die der Abscisse $x + h$ entsprechenden Ordinaten erhalten:

$$y + y'h + \tfrac{1}{2}y''h^2 \ldots \text{ und } Y + Y'h + \tfrac{1}{2}Y''h^2 + \ldots$$

Hieraus entspringt für den Abstand δ unserer zwei Curven im Sinne der Ordinaten:

$$\delta = h(y' - Y') + \tfrac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \ldots,$$

wobei in Y', Y'' ... X mit x zu vertauschen ist.

Je kleiner δ für ein gegebenes h wird, desto näher werden die entsprechenden Punkte einander liegen, so daß der Grad der Annäherung unserer beiden Curven in einer bestimmten Ausdehnung h von der Kleinheit von δ abhängt. Trifft es sich, daß der Werth von x, für welchen $y = Y$ wird, auch $y' = Y'$ liefert, wodurch:

$$\delta = \tfrac{1}{2}h^2(y'' - Y'') + \tfrac{1}{6}h^3(y''' - Y''') + \ldots;$$

so liegt die zweite Curve der ersten immer näher als eine dritte, welche, durch den nämlichen Punkt (x, y) gehend, die ebengedachte Bedingung nicht erfüllt. Denn ist $\beta = \varphi\alpha$ die Gleichung jener Curve und Δ die Differenz der der Abscisse $x + h$ zugehörigen Ordinaten derselben und der ersten krummen Linie; so kommt:

$$\Delta = h(\beta' - y') + \tfrac{1}{2}h^2(\beta'' - y'') + \ldots,$$

weil $\varphi x = fx$ für den gemeinschaftlichen Punkt. Die Ausdrücke der beiden Abstände δ und Δ heben demnach die Form:

$$\delta = bh^2 + ch^3 + \ldots,\ \Delta = Ah + Bh^2 + Ch^3 \ldots, \text{ woraus:}$$

$$\Delta - \delta = Ah + (B - b)h^2 + (C - c)h^3 \ldots$$

Wählt man nun h hinlänglich klein, damit das Zeichen dieser Reihe mit jenem des ersten Gliedes Ah übereinstimme, so wird $\Delta > \delta$ für jene Werthe von h und für alle diejenigen, welche kleiner als dieselben sind. Die Curve $y = Fx$ nähert sich daher bei gedachter Ausdehnung h in der Gegend des gemeinsamen Punktes der Curve $y = fx$ mehr als irgend eine dritte Curve $\beta = \varphi\alpha$, von welcher Beschaffenheit auch solche sein mag.

Besteht außer der Relation $y' = Y'$ auch noch $y'' = Y''$, so wird sich durch eine ähnliche Betrachtungsweise ergeben, daß die zweite Curve der ersten in der Gegend ihres Durchschnitts näher komme als irgend eine dritte, für welche jene zwei Bedingungen nicht stattfinden. Ueberhaupt liegen unsere beiden Curven in der Umgebung ihres gemeinsamen Durchschnitts desto näher an einander, je mehr von den Größen:

$$y' - Y', \; y'' - Y'', \; y''' - Y''' \; \ldots$$

für die Abscisse desselben gleich Null werden. Man drückt sich hierbei folgendermaßen aus: Die beiden Curven, welche durch einen Punkt (x, y) gehen, haben eine Berührung oder Osculation der ersten Ordnung, wenn $y' - Y' = 0$; eine Berührung oder Osculation der zweiten Ordnung, wenn $y' - Y' = 0$ und $y'' - Y'' = 0$ u. s. w.. Besteht dergestalt im Punkt (x, y) zwischen den beiden Curven eine Berührung von einer gewissen Ordnung, so kann keine dritte Curve zwischen den beiden vorigen hindurchgehen, wofern sie nicht mit der ersten eine Berührung von einer mindestens eben so hohen Ordnung bildet.

§. 85. Es ist aus dem eben Gesagten leicht das Verfahren abzuleiten, einer Curve $Y = FX$, die blos ihrer Gattung nach gegeben ist, d. h. solcher, in deren Gleichung die vorkommenden Constanten noch unbestimmt sind, eine Berührung von der $n$ten Ordnung in dem Punkte (x, y) mit einer vollständig bestimmten Curve $y = fx$ zu verschaffen. Man braucht zu diesem Behufe blos x statt X in den $n+1$ Gleichungen:

$$y = Y, \; y' = Y', \; y'' = Y'' \; \ldots$$

zu setzen, und daraus alsdann die $n+1$ unbekannten Constanten zu bestimmen. Hieraus sieht man sogleich, daß die Curve nur eine Berührung der $n$ten Ordnung eingehen könne, insofern ihre Gleichung

wenigstens $n+1$ unbestimmte Constante enthält. Die auf diese Weise bestimmte Curve wird die osculatorische (innigst berührende) Curve genannt; sie wird von der Beschaffenheit sein, daß keine unter den krummen Linien, welche nicht eben so vielen Bedingungen Genüge leisten, zwischen ihr und der ersten hindurchgehen kann.

§. 86. Wir wollen dies vorerst auf die gerade Linie anwenden, deren allgemeine Gleichung $Y=aX+b$ ist.

Soll diese Linie mit der bestimmten Curve $y=fx$ eine Berührung der ersten Ordnung eingehen; so haben wir $y=ax+b$ und $y'=a$, woraus sich die Constanten a und b herleiten lassen. Es ergibt sich hiernach als Gleichung der geraden Linie, welche eine Berührung der ersten Ordnung mit der bestimmten Curve im Punkte (x, y) hat oder eine Berührende derselben ist:

$$Y-y=y'(X-x).$$

Aus dieser Gleichung der Tangente kann man nun auf einem andern Wege wie früher, die Formel für die Subtangente und daraus jene der Subnormale herleiten.

§. 87. Als zweites Beispiel gelte der Kreis, dessen allgemeine Gleichung ist:

$$(Y-\beta)^2+(X-\alpha)^2=\gamma^2,$$

wo γ der Halbmesser, α und β die Coordinaten des Mittelpunkts sind. Um dem Kreise eine Berührung der zweiten Ordnung mit der gegebenen Curve $y=fx$ zu verschaffen, differentiiren wir zweimal seine Gleichung, wodurch wir erhalten:

$$(Y-\beta)Y'+X-\alpha=0,\ (Y-\beta)Y''+Y'^2+1=0.$$

Verwandeln wir in diesen drei Gleichungen X in x, Y in y, Y' in y' und Y'' in y''; so geben sie:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2 \ \ldots\ (1),$$

$$(y-\beta)y'+x-\alpha=0 \ \ldots\ (2),$$

$$(y-\beta)y''+y'^2+1=0 \ \ldots\ (3),$$

Bestimmen wir vermittelst der beiden letztern die Werthe von $y-\beta$ und $x-\alpha$, und substituiren wir sie in die erste; so finden wir:

$$\gamma=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},\ \alpha=x-\frac{y'}{y''}(1+y')^2,\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Wir hätten hiermit die Coordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser des Osculationskreises für jeden Punkt (x, y) der vorgelegten Curve $y=fx$ bestimmt.

Anmerkungen: 1. Da der Osculationskreis sich unter allen berührenden Kreisen an die Curve im Punkte (x, y) am innigsten anschließt, mithin auch seine Krümmung jener der Curve in diesem Punkte am nächsten kommt; so kann die Krümmung der Kurve in gedachtem Punkte durch die dieses Kreises beurtheilt werden. Es ist dies der Grund, warum der Osculationskreis auch Krümmungskreis der Curve $y=fx$ im Punkte (x, y) genannt wird.

2. Da der Werth des Halbmessers γ das doppelte Zeichen $\pm$ mit sich führt, so ist die Frage, welches von den beiden Zeichen zu wählen sei. Da dieser Halbmesser im Allgemeinen weder in der Richtung der Abscissen, noch in jener der Ordinaten liegt, so hat er eigentlich kein Vorzeichen, oder mit andern Worten: er ist immer positiv. Man wird daher das Zeichen $+$ nehmen, wenn y'' positiv ist, d. h. wenn die Curve ihre erhabene Seite gegen die Abscissenachse hinwendet, während im entgegengesetzten Fall das Zeichen $-$ gilt, d. h. wenn die Curve gegen die Abscissenachse hohl ist.

§. 88. Aus dem Vorgetragenen ergeben sich mehrere Folgerungen:

1. Die Curve und der Krümmungskreis besitzen an ihrem gemeinschaftlichen Punkte dieselbe Tangente, weil für beide daselbst y' einerlei Werth hat.

2. Setzt man in die Gleichung $y'(Y-y)+X-x=0$, welche der Normale angehört, α und β statt X und Y; so wird sie befriedigt, da man die Relation (2) wiederfindet, die nur eine Berührung der ersten Ordnung zwischen der Curve und dem Kreise ausspricht. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt daher mit jenen der schlechtweg berührenden Kreise auf der an die Curve gezogenen Normale.

3. Die Gleichung der Evolute (Mittelpunktscurve) wird erhalten, wenn man y und x zwischen der Gleichung $y=fx$ der vorgelegten Curve und den Gleichungen (2) und (3) eliminirt.

4. Wir können die Gleichungen (1) und (2) nicht blos in Bezug auf x und y, sondern auch in Bezug auf α, β und γ differentiiren, indem die letzteren Größen Funktionen von x sind. Geschieht dies nun vorerst mit der Gleichung (2), so kommt:

$$(y-\beta)y''+y'^2-\beta'y'-\alpha'+1=0;$$

woraus durch Abziehung der Gleichung (3) entspringt:

$$\beta'y'+\alpha'=0,$$

d. h. die Derivirte der Gleichung (2) in Bezug auf α und β allein, wie es zu erwarten war. Es besteht hiernach für die Tangente des Winkels der Normale mit der Absciſſenachſe die Relation:

$$-\frac{1}{y'}=\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Nun haben wir aber bei der Evolute, deren Gleichung von der Form $\beta=\varphi\alpha$ ist, für die Tangente des Winkels der durch den Punkt (α,β) an diese Curve gezogene Berührende den Ausdruck:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{\beta'}{\alpha'}=-\frac{1}{y'},$$

weil in unserer Rechnung β und α als Funktionen von x betrachtet wurden. Hieraus sieht man, daß die Normale der Evolvente eine Berührende der Evolute ist.

5. Verfahren wir ähnlicherweise mit der Gleichung (1), d. h. differentiiren wir dieselbe, indem wir darin alles sich ändern lassen, und ziehen dann das Resultat von der Gleichung (2) ab, oder was auf eins herauskommt, differentiiren wir die Gleichung (1) in Bezug auf α, β und γ allein; so entsteht:

$$-(y-\beta)\beta'-(x-\alpha)\alpha'=\gamma\gamma'.$$

Um hieraus eine Relation abzuleiten, welche allen Punkten der Evolute angehört, müssen wir x und y eliminiren. Wir setzen deshalb statt $x-\alpha$ und $y-\beta$ ihre Werthe aus (2) und (3), was uns, nachdem $-\frac{\alpha'}{\beta'}$ für y' gesetzt worden, liefert:

$$x-\alpha=-\frac{y'\gamma}{\sqrt{(1+y'^2)}}=\frac{\alpha'\gamma}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}},$$

$$y-\beta=\frac{\gamma}{\sqrt{(1+y'^2)}}=\frac{\beta'\gamma}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}}.$$

Mittelst dieser Werthe verwandelt sich die obenstehende Gleichung in:

$$\frac{\alpha'^2\gamma+\beta'^2\gamma}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}}=-\gamma\gamma' \text{ oder } \gamma'=\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2)}.$$

Nimmt man α zur unabhängigen Veränderlichen, so ist $\gamma'=\sqrt{(1+\beta'^2)}$; dieser Ausdruck $\sqrt{(1+\beta'^2)}$ ist aber auch der Differentialcoefficient s' des Bogens der Curve, deren Coordinaten α und β sind. Wir haben daher $\gamma'=s'$, oder die ursprüngliche Gleichung $\gamma=s+A$, wo A eine willkürliche Constante darstellt. Für einen zweiten Punkt ist ebenso:

$$\gamma_{,}=s_{,}+A\,;\ \text{folglich } \gamma-\gamma_{,}=s-s_{,}.$$

Hieraus geht hervor, daß der Krümmungshalbmesser nach denselben Differenzen, wie der Bogen der Evolute variirt. Sind demnach z. B. O und D Krümmungsmittelpunkte für die Punkte B und M, so ist der Bogen OD der Evolute gleich dem Unterschiede der Krümmungshalbmesser BO und MD. Ein um die convexe Seite der Evolute OD gewundener und dann in die Richtung BO gespannter Faden wird hiernach, wenn er sich von dieser nach und nach dergestalt abwickelt, daß er immer straff angespannt bleibt und an jedem Punkte, wo er besagte Curve verläßt, eine Berührende derselben ist, die Evolvente beschreiben.

6. Man sieht auch, daß alle Evoluten rectificabel sind, d. h. daß man die Länge dieser Curve zwischen zwei bestimmten Punkten derselben durch eine gerade Linie messen kann, weil die Zunahme des Bogens der Evolute der Zunahme des Krümmungshalbmessers der Evolvente, dessen Werth sich jederzeit angeben läßt, gleich ist.

7. Die Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser γ und die Coordinaten α, β des Krümmungsmittelpunkts bieten sich unter verschiedenen Formen dar, je nachdem diese oder jene Veränderliche als unabhängig betrachtet wird. So haben wir, wie im § 39 gezeigt worden:

$$\gamma=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}$$

wenn die unabhängige Veränderliche willkürlich ist; ferner:

$$\gamma=\frac{x'}{y''}=-\frac{y'}{x''},$$

wenn der Bogen s diese Veränderliche ist.

Im Fall, daß die Abscisse x die Urvariable bleibt, lassen sich die Werthe von γ, α und β auch wie folgt, schreiben:

$$\gamma=\frac{s'^3}{y''},\ \alpha=x-\frac{y's'^2}{y''},\ \beta=y+\frac{s'^2}{y''}.$$

8. Nimmt man Polarcoordinaten, so findet man, wenn x und y durch diese neuen Coordinaten u und ϑ ausgedrückt, ferner in den Werth von γ die auf x bezüglichen Differentiale in solche übertragen werden, die sich auf die unabhängige Veränderliche ϑ beziehen, nach gehöriger Reduktion, wobei die im §. 37 aufgestellten Formeln zu benutzen sind:

$$\gamma=\frac{(u'+u^2)^{\frac{3}{2}}}{2u'^2-uu''+u^2}=\frac{s'^3}{2u'^2-uu''+u^2}.$$

Anmerkungen: 1. Das in Nr. 5 angegebene Verfahren hat eine große Aehnlichkeit mit der Beschreibung der Kreislinie; die Evolute dient statt des Mittelpunktes und der Krümmungshalbmesser, statt constant zu sein, ändert sich mit jedem Punkt. Mittelst einer solchen Betrachtung bestimmte Huyghens den Osculationskreis, auf welchen er zuerst aufmerksam machte.

2. Will man aus der gegebenen Gleichung $\beta=\varphi\alpha$ der Evolute die Gleichung der Evolvente $y=fx$ herleiten, so muß man zwischen den Gleichungen

$$\alpha-x=-\frac{s'^2y'}{y''} \text{ und } \varphi\alpha-y=\frac{s'^2}{y''}$$

die Größe α eliminiren. Man erhält auf diese Art für die gesuchte Evolvente eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen x und y.

§. 89. Wir wollen das oben Vorgetragene jetzt auf einige Beispiele anwenden.

1. Für die Parabel $y^2=2px$ ist $y'=\frac{p}{y}$, $y''=-\frac{p^2}{y^3}$.

Hieraus entsteht: $s'=\sqrt{\left(\frac{2x+p}{2x}\right)}$, $\gamma=\frac{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}=\frac{N^3}{p^2}$,

wo N die Länge der Normale darstellt. Der Krümmungshalbmesser der Parabel ist daher der durch das Quadrat des halben Parameters dividirten dritten Potenz der Normale gleich. Im Scheitel A (Fig. 10),

wo $x=0$, hat man $\gamma=p$, d. h. der Abstand des Scheitels vom zugehörigen Krümmungsmittelpunkt beträgt das Doppelte der Focaldistanz. In dem Maße x wächst, nimmt die Krümmung ab und dies ohne Ende. Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind:

$$\alpha=3x+p,\ \beta=-\frac{2xy}{p},$$

woraus durch Elimination von x und y die Gleichung der Evolute entspringt:

$$\beta^2=\frac{8}{27p}(\alpha-p)^3,$$

oder, wenn man den Ursprung nach I verlegt, $\beta^2=\frac{8\alpha^3}{27p}$, welche Gleichung zeigt, daß die Curve eine kubische Parabel ist. Sie besteht aus den beiden Zweigen Io und Ib, wovon der erste durch seine Abwicklung den Zweig AM und der andere den Zweig AR der Apollonischen Parabel erzeugt.

Anmerkung. Bei der Abwicklung des um den einen oder den andern dieser Zweige Io und Ib gelegten Fadens muß derselbe im Punkte I, in der Verlängerung der Tangente NI eine dem Krümmungshalbmesser in A, d. h. dem halben Parameter der Parabel gleiche Länge besitzen.

2. Für die Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, hat man $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Hieraus folgt, wenn $a^2-b^2=c^2$ gesetzt wird:

$$\gamma=-\frac{(a^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b},\ \alpha=\frac{c^2x^3}{a^4},\ \beta=-\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Durch Zusammenstellung des Werthes von γ mit jenem der Normale $N=\frac{b}{a}\sqrt{(a^4-c^2x^2)}$, und jenem des Parameters $p=\frac{2b^2}{a}$ ergibt sich $\gamma=\frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}$ d. h. der nämliche Satz wie bei der Parabel.

Da γ mit dem Wachsen von x abnimmt, so ist in den Endpunkten der Achsen γ ein Maximum oder Minimum in der Art, daß in den Scheiteln O und O′ der Ellipse die Krümmung am größten, wo

$$\gamma=\frac{b^2}{a},\ \alpha=\pm\frac{c^2}{a},\ \beta=0;$$

und in den Scheitelpunkten D und D' die Krümmung am kleinsten ist, wo $\gamma = \frac{a^2}{b}$, $\alpha = 0$, $\beta = \pm \frac{c^2}{b}$.

Die auf solche Weise bestimmten Punkte h, h', i, i' geben die Krümmungsmittelpunkte für die Endpunkte der Achsen an. Als Gleichung der Evolute der Ellipse entsteht, wenn wir x und y in Werthen von α und β ausdrücken und diese in die ursprüngliche Gleichung der Ellipse substituiren:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\beta^2 b^2}{c^4}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^2 a^2}{c^4}\right)} = 1, \text{ oder:}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{p}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\alpha}{q}\right)^2} = 1, \text{ wenn}$$

$Ch = q$, $Ci = p$ gesetzt wird.

Diese Curve besteht aus vier Aesten, welche ihre convexe Seite den beiden Achsen zuwenden, gegen welche sie symmetrisch liegt; ihre Gestalt ist in Fig. 11 angegeben worden. Das für die Ellipse Gesagte gilt, wenn b mit $b\sqrt{-1}$ vertauscht worden, auch für die Hyperbel.

Anmerkung. Für $a = b$ geht die Ellipse in einen Kreis und die Gleichung der Evolute in $\beta^2 + \alpha^2 = 0$ über; aus welcher letztern Gleichung folgt, daß sich für den Kreis die Evolute auf einen Punkt reducirt, wie es sein muß.

3. Die Cycloide gibt:

$$y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)}, \quad y'' = -\frac{r}{y^2}; \text{ woraus:}$$

$$s'^2 = \frac{2r}{y} \text{ und } \gamma = 2\sqrt{(2ry)} = 2N.$$

Dies Resultat zeigt, daß der Krümmungshalbmesser MM' (Fig. 5) doppelt so groß als die Normale MD ist. Die Ausdrücke von $x - \alpha$ und $y - \beta$ liefern:

$$\alpha = x + 2\sqrt{(2ry - y^2)}, \quad \beta = -y.$$

Substituirt man die daraus für x und y sich ergebenden Werthe in die ursprüngliche Gleichung der Cycloide, so erhält man für die Evolute:

$$\alpha = r \operatorname{arc}\left(\sin v = -\frac{\beta}{r}\right) + \sqrt{(-2r\beta - \beta^2)}.$$

Macht man $\beta = -2r + \beta_1$, was darauf hinausläuft, statt der nega-

tiven Ordinate IM' die positive P'M' einzuführen, welche letztere auf die in der Distanz AA'=2r unterhalb der Achse AE derselben parallel gelegten Achse A'L bezogen ist; so bekommt man:

$$\alpha = r \operatorname{arc}\left(\sin v = \frac{2r-\beta_1}{r}\right) + \sqrt{(2r\beta_1-\beta_1^2)}.$$

Setzt man ferner $\alpha = r\pi - \alpha_1$, d. h. führt man statt der Abscisse AI die Abscisse IE=AE—AI ein; so erfolgt, wenn man erwägt, daß zwei Bogen, deren Sinusversus sich zum Durchmesser ergänzen, Supplemente von einander sind:

$$\alpha_1 = r \operatorname{arc}\left(\sin v = \frac{\beta_1}{r}\right) - \sqrt{(2r\beta_1-\beta_1^2)}.$$

Die Evolute der Cycloide ist daher wieder eine Cycloide, die von dem nämlichen Erzeugungskreise wie die erste gebildet wird, während derselbe sich auf der Geraden LA' in einer der AE entgegengesetzten Richtung fortwälzt.

Anmerkung. Dasselbe Resultat läßt sich aus der Bestimmung des Krümmungshalbmessers folgendermaßen herleiten.

Man verlängere den Durchmesser GD bis er A'L in D' trifft und ziehe D'M'; es ist dann der Winkel DM'D' ein rechter. Der mit DD' als Durchmesser beschriebene Kreis wird daher durch M' gehen und dem Erzeugungskreise GMD gleich sein. Man hat mithin Bogen D'M'= Halbkreis GMD— Bogen M'D = Halbkreis GMD— Bogen DM=AE—AD=D'L; woraus folgt, daß die Evolute LM'A eine Cycloide ist, welche von dem sich über LA' nach A' wälzenden Krise D'M'D erzeugt wird.

4. Für die logarithmische Spirale (Fig. 9) $u=a^{\vartheta}$ findet man $\gamma = u\sqrt{(1+l^2a)} = \frac{u}{\cos\eta}$, da die Tangente des Winkels AMN $=\eta$ des Leitstrahls mit der Normale $=la$ ist. Die Projection des Krümmungshalbmessers auf den Leitstrahl ist aber $=u$, woraus hervorgeht, daß die im Pol auf den Leitstrahl errichtete Senkrechte die Normale im Krümmungsmittelpunkt N trifft. AN ist folglich der Leitstrahl der Evolute und AM ihre Subtangente. Da AM mit der Evolvente in jedem Punkte den nämlichen Winkel β wie AN mit der Evolute bildet, so ist die letztere gleichfalls eine logarithmische Spirale.

§. 90. Auf analoge Weise würde man die oben gegebene Theorie in Anwendung bringen, wenn Curven eine Berührung von höherer Ordnung eingehen sollen. (Man vergleiche hiermit la théorie des

fonctions analytiques par Lagrange, übersetzt von L. A. Crelle.) Auch sieht man bald ein, daß zwei Curven, zwischen denen eine Osculation der dritten, vierten ..., Ordnung besteht, in ihrem gemeinschaftlichen Punkte einerlei Berührende und einerlei osculatorische Kreislinie haben.

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Krümmungskreises, die zugleich für alle Osculationen von gerader Ordnung gilt, ist, daß er die Curve in dem Punkt, wo er sie berührt, auch durchschneidet. Wir haben nämlich für die Differenz δ unserer zwei Berührungscurven einen Ausdruck von der Form $\delta = Mh^m + Nh^{m+1} + \text{rc.}$, worin für hinlänglich kleine Werthe von h das Zeichen von δ mit dem des ersten Gliedes Mh^m übereinstimmt. In dem Fall nun eine Berührung von gerader Ordnung stattfindet, wird das erste die ungerade Potenz von h enthaltende Glied sein Zeichen zugleich mit h ändern, woraus sofort hervorgeht, daß die osculatorische Linie unterhalb der gegebenen Linie auf der einen und oberhalb derselben auf der andern Seite der Curve liegen muß. Dagegen enthält bei den Berührungscurven von ungerader Ordnung jenes erste Glied eine gerade Potenz von h, wonach das Zeichen des Werthes von δ sich nicht ändert, wenn man $+h$ mit $-h$ vertauscht; d. h. es findet dann bei unsern Curven im Berührungspunkte kein Durchschneiden statt.

Von den Asymptoten der krummen Linien.

§. 91. Wenn der Taylor'sche Satz auf die Entwicklung von $f(x+h)$ nicht mehr anwendbar ist, so kann man eine gewisse Osculation nur insofern eintreten lassen, als die Reihe von $F(x+h)$ nach dem nämlichen Gesetze fortschreitet, wenigstens in der Ordnung der mit einander zu vergleichenden Glieder: diese Bedingung hängt von der eigenthümlichen Beschaffenheit der Funktionen fx und Fx ab und kann nur zufälligerweise, d. h. für besondere Werthe von x stattfinden. Damit unsere Curven an besagter Stelle eine Osculation eingehen, haben wir dann, einem dem vorhergehenden ähnlichen Raisonnement zufolge, die Coefficienten der ersten Glieder einander gleich zu setzen.

Es seien $y=fx$ und $y=Fx$ die Gleichungen der beiden Curven; ferner werde angenommen, daß fx und Fx in Reihen nach den

fallenden Potenzen von x entwickelt worden, so daß jede dieser Funktionen die Form hat:

$$Ax^a + Bx^{a-b} + \ldots + Mx^{-m} + Nx^{-m-n} + \ldots$$

Sind nun die Exponenten dieser beiden Entwicklungen bis zu einem gewissen Gliede Mx^{-m} dieselben, und kann man zugleich mit Hülfe einiger Constanten, ohne Einführung imaginärer Größen, die ersten Coefficienten einander gleich machen; so wird die Differenz zwischen zwei beliebigen Ordinaten von der Form sein: $M'x^{-m} +$ ꝛc. Hieraus folgt, daß die eine Curve der andern fortwährend näher kommen wird, in dem Maße als x wächst, ohne sie jemals zu erreichen, dergestalt, daß keine andere Curve sich an dieselbe enger anschließen kann, insofern sie nicht den nämlichen Bedingungen Genüge leistet. Unsere gedachten Curven werden demnach gegenseitig Asymptoten zu einander sein. Eine ins Unendliche sich erstreckende Curve besitzt daher eine unendliche Anzahl von Asymptoten, welche dadurch gefunden werden, daß man $y=fx$ in eine fallende Reihe entwickelt und als Ordinate der gesuchten Linie die Summe der ersten Glieder nimmt und zwar bis zu einer gewissen Stelle, worin der Exponent negativ ist, oder mit andern Worten, daß man eine Funktion Fx bildet, deren Entwicklung mit denselben ersten Gliedern anfängt.

§. 92. Nachstehende Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

1. Für die Hyperbel hat man:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} = \pm \frac{bx}{a} \mp \tfrac{1}{2} bax^{-1} + \text{ꝛc.}$$

Daraus folgt, daß die geraden Linien, welche $y = \pm \frac{bx}{a}$ zu Gleichungen haben, die einzigen geradlinigen Asymptoten der Hyperbel sind.

Dasselbe ergibt sich für $xy=m^2$, wo $x=0$ und $y=0$ wird.

2. Für die Curve, deren Gleichung $y = \frac{k}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ ist und die aus vier in Bezug auf die Coordinatenachsen symmetrisch liegenden Zweigen besteht, erhält man:

$$y=kx^{-1} + \text{ꝛc.}, \text{ oder } x=a+\tfrac{1}{2}\frac{k^2}{a}y^{-2} + \text{ꝛc.},$$

je nachdem man die Entwicklung nach den Potenzen von x oder denen von y vornimmt. Die Geraden, deren Gleichungen $y=0$ und $x=a$

sind, geben daher Asymptoten ab. Auch die Hyperbel, welche die Achsen der x und y zu Asymptoten und k zur Potenz hat, ist hier eine solche Asymptote: nur ist die Annäherung bei der hyperbolischen Asymptote bedeutend größer als bei der geradlinigen.

3. Für $y^3-3axy+x^3=0$ (Fig. 12) hat man:

$$y=-x-a+\tfrac{1}{3}a^3x^{-2}-\tfrac{1}{3}a^4x^{-3}\ \ldots$$

Die Gerade $y=-x-a$ ist folglich eine Asymptote; man construirt dieselbe, indem man $AB=AC=a$ nimmt und die Gerade BC zieht.

4. Für $y^4-2x^2y^2-x^4+2axy^2-5ax^3=0$

findet man, wenn $\sqrt{(1\pm\sqrt{2})}=p$ gesetzt worden:

$$y=\pm px\pm\frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p}+Ax^{-1}+\ \ldots$$

Die Geraden GF, GH (Fig. 13), welche die zwei ersten Glieder zu Ordinaten haben, geben folglich die geradlinigen Asymptoten der vorgelegten Curve ab.

Von den besondern Punkten ebener Curven.

§. 93. Man nennt besondere Punkte einer Curve alle diejenigen Punkte, in welchen sie eine bemerkenswerthe Eigenschaft darbietet. Dergleichen Punkte sind: 1) die Grenzpunkte, d. h. die Punkte, wo die Ordinate einen größten oder kleinsten Werth erreicht. 2) Die vielfachen Punkte, wo mehrere Zweige der Curve sich vereinigen, sei es, daß sie einander berühren oder durchschneiden: der gemeinschaftliche Punkt heißt ein doppelter, dreifacher, vierfacher... Punkt, je nachdem daselbst zwei, drei, vier ... Zweige einander begegnen. 3) Die conjugirten Punkte, welche von der Curve ganz abgesondert, jedoch in der Gleichung derselben begriffen sind. 4) Die Flexions- oder Beugungspunkte, wo die Concavität der Curve gegen eine feste Gerade in eine Convexität übergeht, und umgekehrt. 5) Die Rückkehrpunkte der ersten Art oder Spitzen, wo zwei Aeste der Curve sich endigen, indem sie ihre convexen Seiten gegen einander kehren. 6) Die Rückkehrpunkte der zweiten Art oder Schnäbel, wo die convexe Seite des einen der zwei sich vereinigenden Aeste gegen die convexe Seite des andern gewendet ist.

Wir wollen uns nun mit der Aufsuchung der Merkmale beschäftigen, woran man die Existenz der hier aufgezählten Punkte zu erkennen vermöge. Was die Auffindung der Grenzpunkte anlangt, so müssen wir im Ganzen dasselbe Verfahren einhalten, was wir früher zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen mitgetheilt haben: weshalb es unnöthig ist, hierbei länger zu verweilen.

Anmerkung. Will man die Grenzpunkte der Curve sowohl nach der Richtung der Ordinaten, als auch nach jener der Abscissen bestimmen; so muß man die aus der Gleichung der Curve hergeleitete Derivirte y' gleich Null und auch $=\frac{1}{0}$ setzen. Die aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der gegebenen gefundenen Werthe von x und y können Grenzpunkten angehören. Um hierüber zu entscheiden, braucht man nur eine genauere Untersuchung der Curve in der nächsten Umgebung jener fraglichen Punkte anzustellen.

§. 94. Um ein Kennzeichen für die vielfachen Punkte einer Curve aufzufinden, sei $V=0$ ihre Gleichung und $My'+N=0$ die Derivirte derselben, wo V eine rationale Funktion von x und y ist, was durch Wegschaffung der etwa vorhandenen Wurzelgrößen immer bewirkt werden kann.

1. Fall. Schneiden sich die Curvenäste in dem fraglichen vielfachen Punkte, so gibt es daselbst mehrere Berührenden; die Derivirte y' wird daher für die besondere Abscisse x und die zugehörige Ordinate y eben so viele Werthe besitzen, als solcher Aeste vorhanden sind. Dies erfordert wegen der rationalen Form des Bruches $-\frac{N}{M}$, daß derselbe in $\frac{0}{0}$ übergeht, oder was dasselbe ist, daß M und N für jene Werthe von x und y gleichzeitig verschwinden (§. 47).

2. Fall. Berühren sich die Curvenäste in dem vielfachen Punkte, so wird y' dort nur einen Werth haben. Es werden selbst, wenn die Berührung z. B. von der $(n-1)$ten Ordnung ist, die $(n-1)$sten Differentialcoefficienten $y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ correspondirend einander gleich sein, dagegen jener der $n$ten Ordnung $y^{(n)}$ verschiedene Werthe

für unseren Punkt erhalten. Nun ist aber die Differentialgleichung der nten Ordnung von der Form $My^{(n)}+\ldots=0$, in welcher Gleichung keine Wurzelgrößen vorkommen und M denselben Coefficienten wie von y', y''... in den vorhergehenden Differentialgleichungen darstellt. Die letztere Gleichung kann daher für die Derivirte $y^{(n)}$ nur in dem Falle verschiedene Größen liefern, wenn sowohl der Zähler als der Nenner M ihres Werthes für ein bestimmtes x und y verschwinden. Es muß also wegen der ersten Differentialgleichung auch N gleich Null werden, folglich y' für den Berührungspunkt der Curvenäste ebenfalls die Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Um daher die vielfachen Punkte einer Curve zu entdecken, bringe man ihre Gleichung auf eine rationale Form $V=0$, differentiire solche dann und setze die Coefficienten M und N beider Differentiale gleich Null. Die aus den Gleichungen $M=0$ und $N=0$ gefundenen Werthe von x und y, welche zugleich der Gleichung $V=0$ Genüge leisten, können die Coordinaten vielfacher Punkte abgeben. Um darüber zur Gewißheit zu gelangen, muß man den Lauf der Curve in der nächsten Umgebung jener Punkte untersuchen, wobei es nützlich ist, auf die Anzahl der reellen Werthe zu sehen, welche die Derivirte y' in Bezug auf den fraglichen Punkt erhält. Wegen der im vorliegenden Falle stattfindenden Identität der Gleichung $My'+N=0$ geht man zur Differentialgleichung der zweiten Ordnung $My''+Py'^2+\ldots=0$ über, in welcher y'' sofort verschwindet und y' in der zweiten Potenz vorkommt. Für den Fall, daß sich die beiden Werthe von y' reell herausstellen, ist der gesuchte Punkt ein doppelter und die Berührenden der beiden Curvenäste werden durch jene Werthe von y' bestimmt.

§. 95. Fallen die gedachten Wurzeln imaginär aus, so hat man einen Punkt ohne Berührende, d. h. einen von der Curve abgesonderten oder conjugirten Punkt. In der That, ist $x=a$ die Abscisse eines solchen Punktes, so wird $y=fx$ für $x=a$ reell und für $x=a\pm h$ imaginär, wenigstens für kleine Werthe von h, woraus folgt, daß von den Derivirten y', y'', y''' ... nothwendigerweise eine kommen muß, welche für $x=a$ imaginär ist. Offenbar findet auch das Umgekehrte statt, d. h. daß, wenn y reell für $x=a$ und zugleich eine gedachter Derivirten imaginär wird, der der Abscisse $x=a$ entsprechende Punkt einen conjugirten Punkt der Curve $y=fx$ abgibt. Nimmt

man nun an, daß in der Reihe der Derivirten $y^{(n)}$ die erste ist, welche für $x=a$ imaginär wird; so muß die Differentialgleichung von der nten Ordnung $My^{(n)}+$ rc. $=0$ der auf die rationale Form gebrachten Gleichung $V=0$, für $x=a$ identisch werden, weil $y^{(n)}$ daraus nicht imaginär hervorgehen kann; d. h. es muß für die Coordinaten eines conjugirten Punktes y' die Form $\frac{0}{0}$ bekommen. Um also die conjugirten Punkte der Curve $V=0$ zu erhalten, wird man abermals aus $M=0$ und $N=0$ die Werthe von x und y herleiten und davon nur diejenigen berücksichtigen, welche zugleich der Gleichung $V=0$ genügen. Für dergleichen Punkte wird die Curve keine Berührende besitzen, mithin y' imaginär sein, während x und y reell sind.

§. 96. Es kann sich ereignen, daß sämmtliche Glieder der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung verschwinden. In solchem Falle muß man seine Zuflucht zur Differentialgleichung von der dritten Ordnung nehmen, in welcher y''' und y'' dann nicht mehr vorkommen und y' auf der dritten Potenz erscheint. Der fragliche Punkt ist ein dreifacher, wenn y' drei reelle Werthe zuläßt; im entgegengesetzten Falle existirt kein vielfacher Punkt. Muß man zur Differentialgleichung von der vierten Ordnung aufsteigen, so hat die Curve einen vierfachen, doppelten oder conjugirten Punkt, je nachdem die vier Wurzeln, oder nur zwei davon reell, oder alle imaginär sind.

Anmerkung. Wer sich über die Entdeckung der besondern oder ausgezeichneten Curvenpunkten noch weitern Aufschluß verschaffen will, den verweisen wir auf den zweiten Abschnitt des classischen Werkes von Dr. J. Plücker: Theorie der algebraischen Curven, gegründet auf eine neue Betrachtungsweise der analytischen Geometrie. (Bonn, bei Adolph Marcus. 1839.)

§. 97. Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

1. Aus $ay^3-x^3y-bx^3=0$ folgt:

$$1) \ldots (3ay^2-x^3)y'-3x^2(y+b)=0,$$

$$2) \ldots 6ayy'^2-6x^2y'-6x(y+b)=0,$$

$$3) \ldots 6ay'^3-18xy'-6y-6b=0.$$

Die Glieder in y'', y''' ... sind weggelassen worden, weil sie in Folge der Rechnung doch verschwinden würden.

Aus $3ay^2-x^3=0$, $x(y+b)=0$. entsteht:

$$y=-b,\ x=\sqrt[3]{3ab^2} \text{ und } x=0,\ y=0.$$

Die ersten Werthe sind unzulässig, weil sie der vorgelegten Gleichung nicht genügen. Für die zweiten Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, bekommt man $ay'^3=b$, d. h. nur einen reellen Werth für y': unsere Curve hat folglich keine vielfachen Punkte.

2. $y^4-x^5+x^4+3x^2y^2=0$ liefert:

$$2yy'(2y^2+3x^2)+4x^3-5x^4+6y^2x=0.$$

Setzt man: $y(2y^2+3x^2)=0$, $x(4x^2-5x^3+6y^2)=0$,

so findet man, daß $x=0$ und $y=0$ allein den verlangten Bedingungen entsprechen. Die Differentialgleichungen der zweiten und dritten Ordnung sind identisch; dagegen ist die vierte: $y'^4+3y'^2+1=0$, deren Wurzeln imaginär sind; der Ursprung ist daher ein conjugirter Punkt.

3. Für $x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$ (Fig. 14) kommt:

$$-6a(y+a)yy'+4x(x^2-a^2)=0,$$

$$-6a(2y+a)y'^2+12x^2-4a^2=0.$$

Die Curve liegt in Bezug auf die Achse der y symmetrisch, weil sich in ihrer Gleichung nur gerade Potenzen von x vorfinden. Indem man $(y+a)y=0$ und $x(x^2-a^2)=0$ setzt und diese Gleichungen mit der vorgelegten combinirt, findet man, daß die Curve drei vielfache Punkte haben könne, nämlich:

in D und D', wo $y=0$ und $x=\pm a$,
ferner in E, wo $x=0$ und $y=-a$.

In diesen doppelten Punkten bilden die Berührenden Ec, Ef, Da, Db mit der Abscissenachse Winkel, deren Tangenten $y'=\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ für den Punkt E, und $y'=\pm\sqrt{\tfrac{4}{3}}$ für D und D' sind.

Für die Punkte, wo die Berührende zur Abscissenachse parallel läuft, mache man $y'=0$ oder $x(x^2-a^2)=0$. Der erste Werth $x=0$ gibt $y=-a$, d. h. den Punkt E wieder, für welchen $y'=\dfrac{0}{0}$ und nicht $=0$ ist. Auch findet man ein Maximum in F, nämlich $y=\tfrac{1}{2}a$.

Dem zweiten Werthe $x=\pm a$ entsprechen außer den Punkten D und D' die kleinsten Ordinaten $D'O=DH=-\frac{1}{2}a$.

Setzt man endlich $y'=\frac{1}{0}$ oder $y(y+a)=0$, so erhält man die Punkte F und G, wo die Berührende der Curve der Achse der y parallel läuft: man findet $AB=AC$.

4. Aus $x^4+2ax^2y-ay^3=0$ (Fig. 15) entspringt:

$$ay'(2x^2-3y^2)+4x(x^2+ay)=0.$$

Nachdem zuvörderst gefunden worden, daß der Ursprung allein ein vielfacher Punkt sein könne, gelangt man zur Differentialgleichung der dritten Ordnung, aus welcher entsteht: $y'=0$ und $y'=\pm\sqrt{2}$. Der Ursprung A ist demnach ein dreifacher Punkt, dergestalt daß die eine Berührende mit der Abscissenachse zusammenfällt und die beiden andern Ab, Ac mit derselben einen Winkel von 45^0 machen.

Die Grenzpunkte H und O findet man, wenn man $y'=0$ oder $x(x^2+ay)=0$ macht, nämlich:

$$y=-a \text{ und } x=\pm a.$$

Die Grenzpunkte F und G ergeben sich aus $y'=\frac{1}{0}$ oder $2x^2=3y^2$, nämlich: $x=\pm\frac{2}{3}a\sqrt{6}$ und $y=-\frac{8}{9}a$.

5. Die Gleichung $y^4-axy^2+x^4=0$ (Fig. 16) liefert:

$$1) \ldots 2yy'(2y^2-ax)+4x^3-ay^2=0,$$

$$2) \ldots 2(6y^2-ax)y'^2-4ayy'+12x^2=0,$$

$$3) \ldots 24yy'^3-6ay'^2+24x=0.$$

Der Ursprung gibt sich als ein dreifacher Punkt zu erkennen, und zwar berühren die Achsen daselbst die Curve, weil man $y'=0$ und $y'=\frac{1}{0}$ hat.

6. Die Curve (Fig. 17), welche durch die Gleichung:

$$y^4+x^4-3ay^3+2bx^2y=0$$

dargestellt wird, besitzt im Ursprung einen dreifachen Punkt.

§. 98. Gehört die Gleichung zu den sogenannten expliciten, so wird die Aufsuchung der vielfachen Punkte um vieles leichter. Die einem solchen Punkte entsprechende Abscisse muß dann, wie wir im §. 46 gesehen haben, aus dem Werthe von y eine Wurzelgröße entfernen, indem sie deren Coefficienten zum Verschwinden bringt. Der Grad jener Wurzelgröße hängt von der Anzahl der Curvenäste ab und

der Exponent des Coefficienten bestimmt, ob ein bloßes Durchschneiden oder eine Berührung stattfindet. Einige Beispiele darüber.

1. $y=(1-x)\sqrt{(2-x)}$ gibt $y'=\frac{3x-5}{2\sqrt{(2-x)}}$.

In dem Werthe von y verschwindet für $x=1$ die Wurzelgröße, welche in jenem von y' wieder zum Vorschein kommt. Also liefert, der Ursprung in I (Fig. 18) angenommen, $IC=1$ einen doppelten Punkt in C, wo die Curvenäste sich unter einem rechten Winkel schneiden, weil $y'=\pm 1$. Ferner gibt $x=\frac{5}{3}$ die Grenzpunkte in D und D′ und $IA=2$ den Grenzpunkt A.

Aehnliche Eigenschaften bietet die regelmäßige Focale dar, deren Gleichung ist: $y=\pm x\sqrt{\left(\frac{r-x}{r+x}\right)}$.

2. Die der Gleichung $y=(2-x)\sqrt{(1-x)}$ angehörige Curve hat einen conjugirten Punkt, dessen Abscisse $x=2$ ist, weil y in der nächsten Umgebung imaginär ausfällt.

Ebenso gibt der Ursprung einen conjugirten Punkt der Curve ab, welche in der Gleichung $y=x\sqrt{(x-b)}$ ihre Darstellung hat.

3. Die Curve $y=(x-a)\sqrt[3]{x}$ hat keinen vielfachen Punkt, weil sie nur aus einem Aste besteht.

4. $y=(x-a)^2\sqrt{(x-b)}+c$, wo $a>b$, drückt die Gleichung der Curve EDFG (Fig. 19) aus, deren zwei Aeste in D die gemeinschaftliche Berührende ED haben.

Ein dreifacher, vierfacher ... Punkt wird ebenso durch eine Wurzelgröße vom dritten, vierten ... Grade angedeutet.

Anmerkungen: 1. Unter der Voraussetzung von $a<b$ wird der doppelte Punkt $x=a$, $y=c$ zugleich ein conjugirter.

2. Kommt in unserer letzten Gleichung $(x-a)$ auf dem Kubus vor, so hat man in diesem doppelten Punkte für die beiden Aeste $y=c$, $y'=0$, $y''=0$: die beiden Aeste besitzen demnach in jenem Punkte einerlei Osculationskreis.

§. 99. Die Betrachtung der verschiedenen Lagen der Berührenden kann zur Untersuchung der Gestalt einer Curve dienen. Vergleichen wir nämlich die derselben Abscisse angehörige Ordinate der

Curve $y=fx$ mit jener der durch den Punkt (x, y) gelegten Berührenden; so haben wir (Fig. 20 und 21):

$$P'M'=y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2 \ldots, \quad P'H=y+y'h.$$

Nehmen wir nun wieder h hinlänglich klein an, damit das Zeichen von $\frac{1}{2}y''h^2$ das des Restes der Reihe abgibt; so wird die Ordinate der Curve größer oder kleiner als jene der Berührenden sein, je nachdem y'' positiv oder negativ ist. Die krumme Linie ist daher bei einer positiven Ordinate gegen die Achse der Abscissen erhaben (convex) im ersten, und hohl (concav) im zweiten Falle. Bei negativen Ordinaten findet offenbar das Gegentheil statt. Kurz eine Curve ist in irgend einem Punkte gegen die Abscissenachse convex oder concav, je nachdem y und y'' das entgegengesetzte oder dasselbe Vorzeichen haben.

Für einen sogenannten Beugungspunkt, wo die Concavität in Convexität oder umgekehrt übergeht, wird folglich y'' sein Zeichen ändern, was erfordert, daß für solchen Punkt y'' Null oder unendlich werde, es sei dann, daß y gleichzeitig mit y'' das Zeichen wechsle, in welchem Falle übrigens, wie wir bald ausführlicher sehen werden, der betrachtete Punkt auf der Abscissenachse liegt.

§. 100. Um zu entdecken, ob sich an einem Punkte (α, β) der Curve $y=fx$ eine bemerkenswerthe Eigenschaft darbiete, d. h. ob derselbe zu den sogenannten besondern Punkten gehöre, muß man den Lauf der Curve in der Nähe des fraglichen Punktes untersuchen. Wir unterscheiden zu diesem Behufe zwei Hauptfälle.

Der erste Hauptfall ist derjenige, in welchem die Entwicklung von:

$$f(\alpha+h)=\beta+Ah^a + Bh^b + \ldots,$$

für h keinen gebrochenen Exponenten mit geradem Nenner enthält. Die Coefficienten sind reell, weil sonst der Punkt ein conjugirter wäre; ferner sind die Größen h^a, h^b ... reell, welches Zeichen h auch haben mag: die Curve erstrekt sich hiernach auf beiden Seiten des erwähnten Punktes (α, β) hin.

1. Die Taylor'sche Reihe auf $f(\alpha+h)$ angewendet, sei in dem zweiten Gliede Ah^a schon unzuläßig, d. h. a ein zwischen 0 und 1 liegender Bruch. Die Derivirte y' wird dann unendlich (§. 43), und die durch den Punkt (α, β) geführte Berührende steht senkrecht

auf der Abscissenachse. Differentiiren wir in Bezug auf h, so entsteht:

$$f'(\alpha+h)=aAh^{a-1}+\ldots, \quad f''(\alpha+h)=a(a-1)Ah^{a-2}+\ldots$$

Der Werth von $f'(\alpha+h)$ dient hier dazu, die Richtung der durch den der Abscisse $\alpha+h$ entsprechenden Punkt geführten Berührenden anzugeben, indem es ganz einerlei ist, ob x oder h als variabel in $f(x+h)$ angesehen wird (§. 42). Das Zeichen von Ah^a und seiner Derivirten entscheidet nun über das der ganzen Reihe, wenn h sehr klein ist. Unter der Annahme, daß a ein Bruch $\frac{m}{n}$ mit ungeradem Nenner ist, wird daher die Curvenordinate $f(\alpha+h)$, wenn m ebenfalls ungerade ist, auf der einen Seite der berührenden Ordinate wachsen und auf der andern Seite derselben abnehmen, da $A\sqrt[n]{h^m}$ sein Zeichen mit h ändert. Es ist folglich ein Beugungspunkt vorhanden in der Art, wie es die Figuren 22 und 23 zeigen, je nachdem A positiv oder negativ ist. Und in der That wechselt $f''(\alpha+h)$ auch das Zeichen mit h, weil dem letztern $a-2$ in dem ersten Gliede einen ungeraden Exponenten $m-2n$ verschafft: die Curve wendet daher einerseits ihre Concavität und andererseits ihre Convexität gegen die Abscissenachse hin. In den Figuren 22 und 23 sind die Gleichungen

$$y=\beta+(x-\alpha)^{\frac{3}{5}} \text{ und } y=\beta-(x-\alpha)^{\frac{3}{5}} \text{ construirt worden.}$$

Ist dagegen m eine gerade Zahl, so hat $A\sqrt[n]{h^m}$ immer dasselbe Zeichen wie A, welches auch das von h sein mag: die diesseits und jenseits von β liegenden Nachbarwerthe werden daher im Wachsen, wenn A positiv, und im Abnehmen begriffen sein, wenn A negativ ist: wonach die Curve die in den Figuren 24 und 25 gegebene Gestalt hat und einen Rückkehrpunkt der ersten Art oder Spitze darbietet. Das Zeichen von $f''(\alpha+h)$ ist offenbar in dem einen Fall negativ, und im andern positiv, so daß die Curve auf beiden Seiten der berührenden Ordinate ihre Concavität oder Convexität gegen die Abscissenachse hinwendet, je nachdem A das Zeichen + oder — besitzt. Die Gleichungen

$$y=\beta+(x-\alpha)^{\frac{2}{3}} \text{ u. } y=\beta-(x-\alpha)^{\frac{2}{3}}$$

haben in den Figuren 24 und 25 ihre geometrische Darstellung.

2. Der Taylor'sche Satz sei bei der Entwicklung von $f(\alpha+h)$ in den beiden ersten Gliedern noch zuläßig, d. h. $a=1$, $b>1$; die Derivirte

y' ist alsdann nicht mehr unendlich und man hat A als Werth für die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen mit der Abscissenachse die durch den Punkt (α, β) gelegte Berührende macht. Die letztere läuft zur Achse der x parallel, wenn $A=0$, und schneidet diese Gerade unter einem Winkel von 45^0, wenn $A=1$, u. s. w..

Aus der Zusammenstellung der Ausdrücke:

$$f(\alpha+h)=\beta+Ah+Bh^b+\ldots,$$
$$f'(\alpha+h)=A+b\beta h^{b-1}+\ldots,$$
$$f''(\alpha+h)=b(b-1)\beta h^{b-2}+\ldots$$

ergibt sich, wenn der Exponent eine gerade Zahl oder ein Bruch mit geradem Zähler ist, daß die Curve keinen bemerkenswerthen Umstand im Punkt (α, β) darbietet, weil sie beiderseits oberhalb der Berührenden, wenn B positiv, und unterhalb derselben, wenn B negativ ist, weiter geht; dabei wird die Differenz der Ordinaten dieser zwei Linien durch Bh^b+ ꝛc. ausgedrückt. Auch stimmt, wie man sieht, das Zeichen von $f''(\alpha+h)$ mit jenem von B überein.

Dem vorliegenden Falle entspricht die Gleichung:

$$y=\beta+x^2+(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}.$$

Ist indessen $A=0$, so findet ein Maximum oder Minimum statt. Es gehört hieher die Gleichung:

$$y=\beta+k(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}.$$

Ist b eine ungerade Zahl oder ein Bruch $\frac{m}{n}$ mit ungeradem Zähler, so ändert Bh^b oder $B\sqrt[n]{(h^m)}$ sein Zeichen mit h, wonach die Ordinaten einerseits im Wachsen, andererseits im Abnehmen begriffen sind. Dasselbe gilt von $f''(\alpha+h)$, weil der Exponent seines ersten Gliedes ebenfalls eine ungerade Zahl $b-2$ oder ein Bruch mit ungeradem Zähler $m-2n$ ist. Im Punkte (α, β) tritt daher eine Beugung ein, deren Beschaffenheit von der Richtung der Berührenden und vom Zeichen der Größe B abhängt. Einige Beispiele hierüber:

1) $y=x+(x-\alpha)^3$; 4) $y=\frac{1}{2}x+(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}$ (Fig. 26);

2) $y=x-(x-\alpha)^3$; 5) $y=-(x-\alpha)^{\frac{5}{3}}$ (Fig. 27);

3) $y=\frac{x^3}{x+1}$ 6) $y=-x+(x-\alpha)^{\frac{7}{3}}$ (Fig. 28).

Die Berührende macht mit der Abscissenachse einen Winkel von 45^0 in (1) und (2); einen Winkel von 135^0 in (6); in (3) und (5) läuft sie zu dieser Achse parallel.

Ist b eine ganze Zahl, d. h. 3, 5, 7 . . . , so verschwindet y'', wobei ein ähnlicher Satz, wie der für das Maximum an seinem Ort angeführte, gilt. Jede der Wurzeln von $y''=0$ kann nämlich nur insofern einen Beugungspunkt liefern, als die erste der nicht verschwindenden Derivirten y''', y^{iv} . . . von ungerader Ordnung ist.

Im Fall, daß b keine ganze Zahl ist, hat man, da es die Einheit übertrifft, $y''=0$ oder $=\frac{1}{0}$, je nachdem $b>$ oder <2.

§. 101. Wir gehen jetzt zu dem zweiten Hauptfall über, in welchem die Entwicklung von $f(\alpha+h)$ einen geraden Wurzelexponenten enthält. Die eine der Ordinaten $f(\alpha+h)$ oder $f(\alpha-h)$ wird dann imaginär, während die andere zwei Werthe hat, weil eine Wurzelgröße mit geradem Exponenten das Doppelzeichen $\pm$ zuläßt, woraus hervorgeht, daß die Curve sich nur auf einer Seite des fraglichen Punktes mit ihren zwei Aesten erstreckt.

1. Die Taylor'sche Entwicklung sei im zweiten Gliede schon unbrauchbar; a liegt mithin zwischen 0 und 1 und die Ordinate wird eine Berührende. Das Glied $\pm A\sqrt[n]{h^m}$ zeigt, unter der Annahme von $a=\frac{m}{n}$, wo n eine gerade Zahl darstellt, daß der Punkt (α, β) in der Richtung der Achse der x eine Grenze der Curve abgibt. Sie hat die Form von NMQ oder N'MQ' (Fig. 29), je nachdem h mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen werden muß.

Dabei ist eine der Ordinaten $>\beta$, die andere $<\beta$ oder PM. Außerdem ist für die Nachbarpunkte von M der eine Werth von $f''(\alpha+h)$ positiv, der andere negativ, woraus folgt, daß einer der Zweige NM seine Convexität und der andere seine Concavität gegen die Achse der x hin zuwendet. Von den Gleichungen:

$$y=k+x\pm(x-\alpha)^{\frac{3}{4}} \text{ und } y=k+x\pm(\alpha-x)^{\frac{3}{4}}$$

entspricht die eine der Curve QMN, die andere der Curve Q'MN'.

Kommt aber der gerade Wurzelexponent in einem der auf Ah^a folgenden Glieder vor, so ist für die angrenzenden Punkte $\beta<f(\alpha+h)$,

wenn A positiv ist; das Entgegengesetzte findet für ein negatives A statt, dem ersten Falle entspricht die Curve QMN, dem zweiten die Curve Q′MN′ (Fig. 30). Ueberdies sieht man, daß hier $f''(\alpha+h)$ und A verschiedene Zeichen haben; es ist daher ein Rückkehrpunkt der zweiten Art oder ein Schnabel vorhanden. Die Gleichung

$$y=\beta+k(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}+l(x-\alpha)^{\frac{1}{4}}$$

liefert hierzu ein Beispiel.

Die Curve liegt auf der linken Seite der berührenden Ordinate PM, wenn h negativ genommen werden muß, um $f(\alpha+h)$ reell zu machen.

2. Die Taylor'sche Reihe werde erst jenseits des zweiten Gliedes unbrauchbar, mithin $a=1$; die Construction der Berührenden im Punkt (α, β) hat dann keine Schwierigkeit. Hat das Glied Bh^b einen geraden Wurzelexponenten oder ist es von der Form $\pm B\sqrt[n]{h^m}$; so liegt der eine Curvenast oberhalb, der andere unterhalb der Berührenden, weil $Y=\beta+Ah$ die Ordinate dieser Linie darstellt: der angedeutete Punkt wird daher eine Spitze abgeben. Man hat ferner y'' Null oder unendlich, je nachdem $b>$ oder <2 ist. Hierher gehören die Gleichungen:

$$2y=-1-x+2(1-x)^{\frac{5}{2}} \text{ (Fig. 31), und}$$

$$y=\beta+x+(x-\alpha)^{\frac{3}{2}} \text{ (Fig. 31),}$$

bei welcher letztern die Berührende für $x=\alpha$ einen Winkel von 45^0 mit der Abscissenachse macht.

Folgt das mit dem geraden Wurzelexponenten versehene Glied auf Bh^b, so reicht die bloße Betrachtung des Zeichens von B hin, um zu entscheiden, ob die Ordinate der Curve oder jene $\beta+Ah$ der Berührenden größer werde. Es wird demnach hier ein Schnabel oder Rückkehrpunkt der zweiten Art vorhanden sein. Die durch die Gleichungen

$$y=\beta+x+\alpha x^2+b\sqrt{x^5} \text{ und } y=\beta+x-\alpha x^2+b\sqrt{x^5}$$

dargestellten Curven QMN und Q′MN′ (Fig. 33) gehören hierher.

§. 102. Fassen wir alles über die ausgezeichneten Punkte der Curven Gesagte kurz zusammen, so haben wir folgende Resultate:

1. Für Grenzpunkte ist y' Null oder unendlich.

2. Für die Beugungspunkte und Spitzen wird y'' Null oder unendlich.

3. Bei dem Beugungspunkte muß die Curve sowohl für die Abscissen, welche zunächst kleiner, als auch für jene, welche zunächst größer sind, als die Abscisse gedachten Punktes, reelle Ordinaten darbieten; während bei den Rückkehrpunkten die Nachbarcoordinaten einerseits derselben reell, andererseits imaginär ausfallen.

4. Um die besondern Punkte zu finden, muß man die Derivirte $My'+N=0$ der Gleichung $\varphi(x, y)=0$ der Curve suchen. Die beiden Gleichungen $M=0$ und $N=0$ in Verbindung mit jener der Curve bieten die Coordinaten solcher Punkte dar.

5. Man kann ebenso die Derivirte der zweiten Ordnung oder jene von $y'=-\frac{M}{N}$ nehmen, was gibt $y''=\frac{Q}{N}$. Die aus den Gleichungen $Q=0$ und $N=0$ für x und y gefundenen Werthe, welche auch der Gleichung $\varphi(x, y)=0$ genügen, können besondern Punkten angehören.

6. Für die auf solche Art erhaltenen Punkte muß man die Entwicklung von $f(x+h)$ bestimmen, oder vielmehr die Beschaffenheit der Curve in der Nähe dieser Punkte untersuchen.

7. Da die Rückkehrpunkte als vielfache Punkte angesehen werden können, so läßt sich die für die letztere gegebene Regel auch für die ersteren anwenden.

8. Bei der Discussion der Gleichungen kann man die Entwicklung von y in eine nach den steigenden oder fallenden Potenzen von x geordnete Reihe gebrauchen. Leicht lassen sich so die Grenzen der Curve, wenn sie deren hat, ferner die geradlinigen oder krummlinigen Asymptoten für ihre in's Unendliche sich erstreckenden Zweige ermitteln.

Zur Uebung wollen wir noch folgende Beispiele hersetzen:

$$y=x+\sqrt[4]{(x-1)}; \qquad y=x^2+\sqrt{(x-2)};$$
$$y=x+\sqrt{(x-1)^3}; \qquad y=x^3+\sqrt{x^3};$$
$$y=x^2+\sqrt{(x-1)^5}; \qquad y=x^2+\sqrt{x^5};$$
$$y=\sqrt[3]{x^3+ax}; \qquad y=\sqrt[3]{(x-\alpha)^{10}}+x;$$
$$y=\sqrt[3]{(x-1)^2}; \qquad y=\beta-\sqrt[5]{x^2};$$
$$y=x^2+\sqrt[3]{(x-1)^5}; \qquad y=x^3+x^2-\sqrt[5]{x^7}.$$

Anmerkungen: 1. Um das Dasein eines Beugungspunktes an der durch $x=a$ bezeichneten Stelle zu erkennen, kann man auch untersuchen, ob die Curve an dem fraglichen Punkte ihre Berührende durchschneidet, d. h. ob für die Abscissen $a+h$ und $a-h$, bei kleinen Werthen von h Ordinaten sich ergeben, wovon die eine kleiner und die andere größer ist als die den nämlichen Abscissen entsprechenden Ordinaten jener Berührenden.

2. Für den Rückkehrpunkt der zweiten Art läßt sich aus dem Differentialcoefficienten y'' keine Bedingungsgleichung wie für den Rückkehrpunkt der ersten Art aufstellen. Denn dieser Coefficient y'' ändert in einem solchen Rückkehrpunkt der zweiten Art sein Zeichen nicht, weshalb er nicht Null oder unendlich zu sein braucht. Dagegen wird gedachter Coefficient für $x=a+h$, falls $x=a$ einem solchen Punkte angehört, für kleine Werthe von h zwei Werthe von einerlei Zeichen besitzen. Will man daher entdecken, ob die Curve $y=fx$ für $x=a$ dergleichen Punkte darbiete, so wird man suchen müssen, ob $x=a$ einen einzigen Werth für y liefert, ferner ob y für $x=a-h$ imaginär wird, und y'' für $x=a+h$ zwei Werthe mit einerlei Zeichen bekommt. So z. B. vereinigen sich die beiden Aeste der Curve, welche durch die sechste $y=x^2+x^{\frac{5}{2}}$ der hier oben stehenden Gleichungen dargestellt wird, im Ursprung und gehen nicht in die Gegend der negativen Abscissen über, weil dann y imaginär ausfällt. Die beiden Ausdrücke:

$$y'=2x\pm\tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},\quad y''=2\pm\tfrac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$$

zeigen, daß die zwei Curvenäste zur gemeinschaftlichen Berührenden die Abscissenachse haben, nach welcher beide ihre erhabene Seite hinwenden.

3. Für alle Punkte, welche $y''=0$ geben, wird der Krümmungshalbmesser unendlich groß, während für die Punkte, welche $y''=\frac{1}{0}$ machen, der Krümmungshalbmesser Null wird. In beiden Fällen läßt demnach die Curve an gedachten Punkten keinen sogenannten Osculationskreis zu; sondern es kommen im ersten Falle die Berührungskreise der Curve um so näher, je größer, und im zweiten Falle, je kleiner ihre Radien werden.

4. Man nennt diejenigen Punkte einer Curve, bei welchen sich für die Abscissen $x+h$ und $x-h$, wo h hinlänglich klein gedacht wird, reelle Ordinaten ergeben und y'' nebst noch einigen höhern Derivirten y''', $y^{IV}\ldots$ verschwinden, Schlangenpunkte, und zwar sichtbare oder unsichtbare, je nachdem an den angedeuteten Stellen eine Beugung der Curve stattfindet oder nicht. Dergleichen Schlangenpunkte entstehen, wenn in Folge einer besondern Bestimmung der Constanten, welche auf die Gestalt der Curve Einfluß haben, mehrere Beugungspunkte sich in einen einzigen vereinigen; dabei werden sie unsichtbar, wenn die Anzahl der zusammenfallenden Beugungen gerade, und sichtbar, wenn diese Zahl ungerade ist. In folgenden zwei Beispielen bieten sich diese Umstände dar.

1) Der Gleichung $y=x^4-(a^2+b^2)x^2+b^2a^2$ entspricht die Curve FCEG (Fig. 34), welche zwei Biegungen in C und D hat. Für $a=b=0$ vereinigen sich die vier Punkte B, C, D, E in einen Punkt A (Fig. 35), und die Biegungen in C und D gehen ganz verloren.

2) Die der Gleichung $y=x^5-(a^2+b^2)x^3+a^2b^2x$ angehörige Curve (Fig. 36) besitzt drei Biegungen in C, A und E, welche, wenn $a=b=0$ wird, sich in eine einzige A (Fig. 37) verwandeln.

Von den krummen Flächen und Curven doppelter Krümmung.

§. 103. Es seien $z=f(x, y)$, $Z=F(X, Y)$ die Gleichungen zweier krummen Flächen. Damit dieselben einen gemeinschaftlichen Punkt (x, y, z) haben, muß für einerlei Ordinaten Z und z bezüglich $x=X$ und $y=Y$ werden. Gehen wir auf jeder der beiden Oberflächen zu einem andern, den Abscissen $x+h$ und $y+k$ entsprechenden Punkte über; so können wir die dazu gehörigen Ordinaten, der Abkürzung halber durch:

$$z+ph+qk+\tfrac{1}{2}rh^2+shk+\tfrac{1}{2}tk^2+ \text{ic. und}$$

$$Z+Ph+Qk+\tfrac{1}{2}Rh^2+Shk+\tfrac{1}{2}Tk^2+ \text{ic., darstellen (§. 51).}$$

Der Abstand der beiden Oberflächen, im Sinne der Ordinaten z, beim zweiten betrachteten Punkte, wäre hiernach folgender:

$$(P-p)h+(Q-q)k+\tfrac{1}{2}(R-r^2)h^2+ \text{ic.}$$

Hat man $P=p$ und $Q=q$, d. h. sind die partiellen Differentialcoefficienten von der ersten Ordnung unserer Funktionen beziehungsweise einander gleich; so überzeugt man sich bald durch eine ähnliche, wie im §. 84 über die Curve angestellte Betrachtung, daß eine dritte Oberfläche, bei welcher jene Glieder nicht verschwinden, in der Nähe des gemeinschaftlichen Punktes außerhalb der beiden ersten Oberflächen fallen müsse, zwischen denen demnach eine Berührung von der ersten Ordnung stattfindet. Die Berührung ist von der zweiten Ordnung, wenn außerdem die Differentialcoefficienten von der zweiten Ordnung beziehungsweise einander gleich sind, oder:

$$R=r,\ S=s,\ T=t.$$

Wir wollen das Gesagte zunächst auf die Ebene anwenden, deren Gleichung ist:

$$Z=AX+BY+C.$$

Da hier nur drei Constanten vorkommen, so kann die Ebene mit der Fläche nur eine Berührung von der ersten Ordnung eingehen. Die Bedingung, daß der Punkt (x, y, z) auf unserer Ebene liegt, gibt: $z=Ax+By+C$. Ferner ist $p=A$, $q=B$, wo p und q üblicherweise die aus der Gleichung der krummen Fläche $z=f(x, y)$, deren Differential $dz=pdx+qdy$ ist, hergeleiteten Funktionen $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ darstellen.

Durch Elimination von A, B, C entsteht:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \quad . \;.\; . \; (A)$$

als Gleichung der die Fläche im Punkte (x, y, z) berührenden Ebene.

Hat man einmal die Gleichung der Berührungsebene gefunden, so läßt sich mit großer Leichtigkeit Alles herleiten, was auf ihre Lage Bezug hat. So z. B. ergibt sich für die Winkel φ, ψ, ω, welche diese Ebene mit den Coordinatenebenen xy, xz, yz macht:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\ \cos\psi=\frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\cos\omega=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

Die Gleichungen der Normale, d. h. der auf die Berührungsebene in dem Punkte, wo sie die Oberfläche trifft, errichteten Senkrechten sind folgende:

$$X-x+p(Z-z)=0,\ Y-y+q(Z-z)=0 \quad . \;.\; . \; (B).$$

Für die Länge δ desjenigen Theils der Normale, welcher zwischen der gegebenen Oberfläche und der Coordinatenebene xy befindlich ist, erhält man:

$$\delta = z\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Anmerkung. Die Gleichung (A) der Berührungsebene für den Punkt M (x, y, z) einer Fläche $z=f(x, y)$ läßt sich durch verschiedene Betrachtungsweisen herleiten. Eine der gewöhnlichsten ist folgende, wo man gedachte Ebene als den geometrischen Ort der Berührenden sämmtlicher Curvenschnitte ansieht, welche entstehen, wenn man durch den Punkt M beliebig viele Ebenen legt. Wir bemerken deshalb vorerst, daß die Projektion der Berührenden MT irgend einer Curve im Raume mit der Berührenden M'T' der Projektion der Curve zusammenfällt. Ziehen wir nämlich durch einen dem M nahe liegenden Punkt N die Secante MN, so wird ihre Projection M'N' die Projection der Curve im Punkte N' treffen, welcher sich mit N auf einer mit MM' parallelen Linie N'N befindet. Dies wird jederzeit der Fall sein, wie nahe an einander die Punkte M und N auch liegen mögen. Reduciren sich mithin diese beiden Punkte auf einen einzigen M, d. h. geht die Secante MN in die Berührende MT über, so werden auch die Punkte M' und N' sich in einen einzigen M' vereinigen, d. h. es wird die Projection M'N' mit der Berührenden M'T' zusammenfallen.

Dies vorausgeschickt, legen wir nun durch den Punkt (x, y, z) eine beliebige Curve, deren eine Projection $y=\varphi x$ sein mag, und deren zweite demnach $z=(x, \varphi x)=\psi x$ vollständig bestimmt sein wird; so hat die Berührende der Curve im Raume folgende Gleichungen:

$$Y-y=\frac{d\varphi}{dx}(X-x),\ Z-z=\frac{d\psi}{dx}(X-x),$$

wo X, Y, Z die laufenden Coordinaten der Berührenden bezeichnen. Es ist aber:

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p+q\cdot\frac{d\varphi}{dx};$$

wodurch die vorstehenden Gleichungen in:

$$Y-y=\frac{d\varphi}{dx}(X-x),\ Z-z=\left(p+q\frac{d\varphi}{dx}\right)(X-x)$$ übergehen.

Durch Elimination der die besondere Curve particularisirenden Function $\frac{d\varphi}{dx}$ ergibt sich als geometrischer Ort aller Berührenden, wie oben, die Gleichung:

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

§. 104. Welchen Gebrauch man von den Gleichungen (A) und (B) machen könne, werden nachstehende Beispiele zeigen.

1. Eine unterscheidende Eigenschaft der cylindrischen Flächen ist, daß die tangirende Ebene derselben in jedem Punkte parallel mit der beweglichen Erzeugungslinie sein wird. Um diese Thatsache analytisch auszudrücken, seien $x=az$, $y=bz$ die gegebenen Gleichungen einer Geraden, welche durch den Ursprung geht und der erzeugenden Geraden parallel läuft. Damit nun die berührende Ebene mit der erzeugenden Geraden parallel werde, haben wir nach §. 33 der analytischen Geometrie im Raume die Relation: $ap+bq=1$; und dies ist die allgemeine Gleichung aller Cylinder, welches auch die Curve sein mag, die die Bewegung der Erzeugungslinie leitet.

2. Das charakterisirende Merkmal der konischen Flächen ist, daß ihre tangirende Ebene immer durch einen bestimmten Punkt (Scheitel) gehen müsse. Sind daher a, b, c die Coordinaten dieses Punktes, so gibt die Gleichung (A), wenn $X=a$, $Y=b$, $Z=c$ gesetzt wird: $z-c=p(x-a)+q(y-b)$ als allgemeine Gleichung der konischen Flächen, wie auch ihre Basis beschaffen sein mag.

3. Die konoidischen Flächen (Kegelkeile), d. h. diejenigen Flächen, welche durch die Bewegung einer Geraden entstehen, die immer durch die Achse der z und eine gegebene Curve geht, wobei sie der Ebene xy parallel bleibt, besitzen die Eigenschaft, daß ihre tangirende Ebene sie in einer der xy parallelen Geraden berührt. Dies analytisch ausgedrückt, liefert

$$Z=z \text{ und } (X-x)p+(Y-y)q=0$$

für die Gleichungen der in der Berührungsebene liegenden, der Coordinatenebene xy parallel laufenden Geraden. Damit dieselbe die Achse der z treffe, muß ihre Projection auf der Ebene xy durch den Ursprung gehen, oder $px+qy=0$ sein: es ist dies die allgemeine Gleichung der konoidischen Flächen.

4. Die Rotationsflächen haben die ihnen ausschließlich zukommende Eigenschaft, daß ihre Normalen sämmtlich die Rotationsachse schneiden. Eliminiren wir daher die Größen X, Y, Z, aus den Gleichungen (B) der Normalen, und aus den beiden Gleichungen der Rotationsachse; so wird das daraus entspringende Resultat die allgemeine Gleichung einer Rotationsfläche ausdrücken, welches auch die erzeugende Curve sein mag, durch deren Umdrehung die Fläche erzeugt wird. Fällt z. B. die Rotationsachse mit der Achse der z zusammen, deren Gleichungen $X=0$, $Y=0$ sind: so erhält man für jede durch Rotation um die Achse der z entstandene Fläche die Relation $py=qx$.

Will man eine Gattung von den hier behandelten Flächen particularisiren, so muß man statt p und q ihre durch die Natur der gegebenen Richtungslinie bestimmten Funktionen einführen, was in der Folge näher untersucht werden soll.

Anmerkung. Sind die Gleichungen der Rotationsachse

$$X=aZ+\alpha,\ Y=bZ+\beta,$$

so findet man folgende, die Rotationsflächen ohne Rücksicht auf die sie erzeugenden Linie allgemein charakterisirende Gleichung:

$$(\beta-y+bz)p-(\alpha-x+az)q+a(\beta-y)-b(\alpha-x)=0.$$

§. 105. Wir wollen jetzt der Kugel eine Berührung von der zweiten Ordnung mit der gegebenen Fläche $z=f(x, y)$ zu verschaffen suchen.

Die allgemeinste Gleichung der Kugel ist:

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2=\varrho^2,$$

wo ϱ der Halbmesser und α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunkts sind. Damit die Kugel zuvörderst eine Berührung von der ersten Ordnung eingehe, hat man:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2\ \ldots\ (1),$$

$$(x-\alpha)+p(z-\gamma)=0\ \ldots\ (2),$$

$$(y-\beta)+q(z-\gamma)=0\ \ldots\ (3).$$

Aus (2) und (3) folgt, daß der Mittelpunkt der berührenden Kugel in der Normale liegt. Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) ergeben sich für die drei Constanten α, β, γ folgende Werthe:

$$\alpha = x + \frac{p\varrho}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\ \beta = y + \frac{q\varrho}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},$$

$$\gamma = z - \frac{\varrho}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}},\ \ldots (4),$$

so daß ϱ willkührlich bleibt. Das Stattfinden einer Berührung von der zweiten Ordnung zwischen unsern beiden Flächen verlangt noch die Erfüllung der drei Bedingungsgleichungen:

$$R-r=0,\ S-s=0,\ T-t=0,$$

denen man im Allgemeinen mit der einzigen unbestimmten Constanten ϱ nicht genügen kann. Die Kugel läßt sich daher im Allgemeinen nicht in dem Sinne zur Osculationskugel einer Fläche verwenden, wie wir früher den Kreis zum Osculationskreis der Curven gebraucht haben, oder mit andern Worten, es gibt für einen Punkt einer krummen Fläche keine Osculationskugel, welche die Osculationskreise sämmtlicher durch gedachten Punkt auf der Fläche gezogenen Curven enthielte.

Anmerkung. Die Unmöglichkeit, für jeden Punkt einer Fläche eine Kugel, welche mit ihr eine Berührung von der zweiten Ordnung eingeht, zu erhalten, ergibt sich schon aus der einfachen Betrachtung, daß die durch die nämliche Normale der Fläche gelegten Ebenen verschieden gekrümmte Schnitte liefern, während dergleichen Schnitte auf der Kugel alle einerlei Krümmung haben.

§. 106. Nichts hindert uns, den Halbmesser ϱ dergestalt zu bestimmen, daß die Summe der Glieder

$$\tfrac{1}{2}(R-r)h^2+(S-s)hk+\tfrac{1}{2}(T-t)k^2$$

in dem Ausdrucke für den Abstand der Fläche und Kugel verschwindet, oder daß man hat: wenn $k=\omega h$ gesetzt wird:

$$r+2s\omega+t\omega^2=R+2S\omega+T\omega^2.$$

Für die Kugel sind aber die Derivirten von der zweiten Ordnung in Bezug auf x und y:

$$(z-\gamma)R+1+p^2=0,\ (z-\gamma)S+pq=0,\ (z-\gamma)T+1+q^2=0.$$

Unsere vorige Bedingungsgleichung verwandelt sich daher in:

$$(z-\gamma)(r+2\omega s+t\omega^2)+1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2=0\ \ldots (5),$$

wo p, q, r, s, t Funktionen von x und y darstellen, welche aus der Gleichung $z=f(x, y)$ der vorgelegten Fläche herzuleiten sind.

Da $\gamma - z = \frac{-\varrho}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, so bekommt man:

$$\varrho = -\frac{[1+p^2+2pq\omega+(1+q^2)\omega^2]\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{r+2s\omega+t\omega^2} \quad \ldots (6).$$

Eine Ebene, durch den Berührungspunkt senkrecht auf die Ebene xy geführt, schneidet nun die krumme Fläche in einer Curve und die Tangentialebene in einer Geraden, welche die Berührende dieser Curve ist. Die Gleichung dieser senkrechten Ebene so wie auch jene des Durchschnitts derselben mit der xy ist $Y-y=\omega(X-x)$, so daß ω die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Projektion der Berührenden mit der Achse der x anzeigt. Sind also die vier Größen α, β, γ, ϱ aus (4) und (6) hergeleitet, so ist die auf solche Weise bestimmte Kugel eine osculatorische für gedachten Durchschnitt; d. h. es kann in diesem Durchschnitt zwischen jener Kugel und der vorgelegten Fläche keine andere Kugel durchgehen. Es liefert daher für einen bestimmten Werth von ω die Gleichung unserer Kugel die eines osculatorischen Kreises.

§. 107. Von den unendlich vielen Werthen des Halbmessers ϱ, welche derselbe für die verschiedenen Werthe von ω annimmt, wollen wir den größten und kleinsten bestimmen.

Aus der Gleichung $\gamma - z = \frac{-\varrho}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ geht hervor, daß der kleinste oder größte Werth von ϱ auch zugleich dem kleinsten oder größten Werthe von γ entspricht. Differentiiren wir daher die Gleichung (5) in Bezug auf γ und ω, und setzen $\gamma'=0$; so finden wir

$$(z-\gamma)(s+t\omega)+pq+(1+q^2)\omega=0.$$

Diese Gleichung durch ω multiplicirt und von (5) subtrahirt, gibt:

$$(z-\gamma)s\omega+pq\omega+(z-\gamma)r+1+p^2=0.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen $z-\gamma$, so bekommt man für ω eine Gleichung von der Form:

$$A\omega^2+B\omega-C=0 \quad \ldots (7),$$

wo der Kürze halber gesetzt wurde:

$$A=(1+q^2)s-pqt,$$
$$B=(1+q^2)r-(1+p^2)t,$$
$$C=(1+p^2)s-pqr.$$

Die Gleichung (6) aufgelöst, gibt:

$$\omega=\frac{-B\pm\sqrt{(B^2+4AC)}}{2A}.$$

Dieser Werth von ω gehört also unter allen Curven, welche durch den Berührungspunkt in der Fläche gezogen werden können, für jene, welche die größte oder kleinste Krümmung besitzen. Jedem Punkte der Fläche entspricht demnach im Allgemeinen eine Curve der größten und eine Curve der kleinsten Krümmung.

Anmerkung. Um den Einfluß der beiden hier gefundenen Werthe von ω auf den Ausdruck von ϱ kennen zu lernen, differentiiren wir denselben zweimal in Bezug auf ω. Wir erhalten dadurch:

$$\frac{d\varrho}{d\omega}=\frac{-2(A\omega^2+B\omega-C)\sqrt{(p^2+q^2+1}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^2},$$

$$\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}=-\frac{2(2A\omega+B)\sqrt{(p^2+q^2+1)}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^2}$$
$$+\frac{8(A\omega^2+B\omega-C)(s+t\omega)\sqrt{(p^2+q+1)}}{(r+2s\omega+t\omega^2)^3}.$$

Wird der Ausdruck $\sqrt{(B^2+4AC)}$ nicht gleich Null, so erscheint $\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}$ für die angeführten Werthe von ω mit entgegengesetzten Zeichen; weshalb der eine derselben einem Maximum und der andere einem Minimum von ϱ entspricht. Verschwindet aber $\sqrt{(B^2+4AC)}$, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt, weil dann $\frac{d^3\varrho}{d\omega^3}$ einen von Null verschiedenen Werth erhält.

§. 108. Da die Lage der Coordinatenebene xy willkührlich ist, so kann man annehmen, daß sie der die Fläche in dem gegebenen Punkte tangirenden Ebene parallel ist. Unter dieser Voraussetzung wird $p=q=0$ und die Gleichung (7) verwandelt sich in:

$$\omega^2+\left(\frac{r-t}{s}\right)\omega-1=0.$$

Da das Produkt den beiden Wurzeln von $\omega = - 1$ ist, so folgt daraus, daß die Curven der größten und kleinsten Krümmung senkrecht auf einander stehen.

Anmerkung. Hat man $r=s=t=0$, wie dies bei der Kugel in allen Punkten und bei der Umdrehungsfläche im Scheitel der Fall ist; so zeigt die aus der Gleichung (7) entstehende Unbestimmtheit, daß die beiden Krümmungslinien in unendlicher Anzahl vorhanden sind.

§. 109. Zur Erläuterung des Vorhergehenden mögen folgende zwei Beispiele dienen:

1. Für das Rotationsellipsoid $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ erhält die Gleichung (7) die Form:

$$xy \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + (x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Diese Gleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Die erste der letztern Gleichungen gehört einer durch den Ursprung der Coordinaten gehenden geraden Linie an, weil die trigonometrische Tangente des Winkels dieser Linie mit der Achse der x gleich dem Verhältniß m der Coordinaten y, x ist. Die zweite Gleichung entspringt aus der Differentiation der dem Kreise zukommenden Gleichung $x^2+y^2=n^2$. Jene drückt die Projection auf der Ebene xy sämmtlicher Durchschnitte aus, welche die durch die Rotationsachse gelegten Ebenen auf dem Ellipsoid hervorbringen, während die andere die Projection auf derselben Ebene derjenigen Schnitte darstellt, welche durch die auf der Rotationsachse perpendikulären Ebenen auf der Fläche erzeugt werden.

2. Für den senkrechten Kreiskegel, dessen Scheitel im Ursprung liegt, ist $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$.

Die Gleichung (7) liefert die zwei Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

denen die beiden ursprünglichen Gleichungen $x^2+y^2=a^2$ und $y=bx$ entsprechen, wo a und b constante Größen bezeichnen. Hiernach sind die beiden Curven der größten und kleinsten Krümmung, in jedem Punkte des Kegels, die durch denselben gezogene Seite des Kegels und der auf der Achse senkrecht geführte Kreis. Die beiden Krümmungshalbmesser werden durch $\frac{1}{0}$ und $-z\sqrt{(2)}$ dargestellt.

§. 110. Will man das Maximum oder Minimum der Ordinate z einer gegebenen Fläche $z=f(x, y)$ finden, so muß man $p=0$, $q=0$ setzen, was den Parallelismus der Berührungsebene mit der Coordinatenebene xy nach sich zieht, ferner x, y und z aus den drei vorhergehenden Gleichungen bestimmen. Die auf solche Art erhaltenen Coordinaten werden jedoch erst dann einem Punkte der Fläche entsprechen, in welchem ihre Ordinate größer oder kleiner als alle sie unmittelbar umgebenden ist, wenn gedachte Werthe den im §. 74 aufgestellten Bedingungen Genüge leisten.

1. Für die durch die Gleichung $x^2+y^2+z^2=r^2$ dargestellte Kugelfläche hat man:

$$p=-\frac{x}{z},\ q=-\frac{y}{z};$$

wonach sich für $x=y=0$ das Maximum $z=r$ herausstellt.

2. Die dem zweifächerigen Hyperboloid angehörige Gleichung $z^2=a+bx^2+cy^2$, wo a, b, c positiv sind, gibt:

$$p=\frac{bx}{z},\ q=\frac{cy}{z}$$

dem $x=y=0$ entspricht hiernach das Minimum $z=\sqrt{a}$.

Anmerkung. Man findet auch größte oder kleinste Ordinaten der Fläche in den Punkten, für welche p und q unendlich werden, wie die Gleichung $z=a+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$ lehrt. Für $x=y=0$ erhält man hier offenbar ein Minimum $z=a$, während die partiellen Differentialcoefficienten

$$p=\frac{2x}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \text{ und } q=\frac{2y}{3(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

sich in diesem Falle unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen. Macht man hier, um ihre wahren Werthe zu finden, $y=mx$; so entsteht:

$$p=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}},\ q=\frac{2m}{3x^{\frac{1}{3}}(1+m^2)^{\frac{2}{3}}},$$

woraus folgt, daß p und q für $x=0$ und $q=0$, bei jedem endlichen Werthe von m, unendlich werden. Unsere Fläche bietet in dem Punkte (0, 0, a) eine Art Rückkehrpunkt dar, über welchen hinaus sie sich nicht erstreckt. Die Größen p und q zeigen sich für den betrachteten Punkt deshalb unter der Form $\frac{0}{0}$, weil jede durch die Achse der z gelegte Ebene die Fläche berührt.

§. 111. Soll die Berührungsebene senkrecht auf der Ebene yz stehen, so muß ihre Gleichung sich auf die Form $Z-z=q(Y-y)$ reduciren, mithin $p=0$ sein. Allgemeiner, ist $Pdx+Qdy+Rdz=0$ die Differentialgleichung einer Fläche $\varphi(x, y, z)=0$; so drückt $P=0$ die Bedingungsgleichung aus, daß die Berührungsebene senkrecht auf der Coordinatenebene yz stehe. Die Coordinaten des Berührungspunktes müssen daher die Gleichungen $P=0$ und $\varphi(x, y, z)=0$ befriedigen, die sofort der Curve angehören werden, für welche die Berührungsebene senkrecht auf der Coordinatenebene yz ist; diese Curve gibt die Grenze unserer Fläche in dem Sinn der yz ab. Durch Elimination von x erhält man die Projection der Fläche auf die letzte Coordinatenebene. Ebenso ergibt sich die Projektion der Fläche auf die Ebene xy, wenn man z zwischen $\varphi=0$ und $R=0$ eliminirt. Die beiden Gleichungen $P=0$, $Q=0$ entsprechen zusammen dem Maximum und Minimum der Ordinate z.

Für die Gleichung der Kugelfläche z. B.:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

hat man $z-c=0$ als Derivirte in Bezug auf z allein; eliminirt man z, so kommt $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ als Gleichung des Projectionskreises auf die Ebene xy, was übrigens einleuchtend ist.

Anmerkung. Die krummen Flächen bieten öfters in ihrem Laufe nicht blos einzelne besondere Punkte, sondern auch ganze Folgen derselben dar, die man besondere Linien nennt. So gibt es Rückkehrlinien, wo zwei Flügel der Fläche sich vereinigen, ferner Beugungslinien, wo der Sinn ihrer Krümmung sich ändert. Alle diese Stellen entsprechen den besondern Werthen der Differentialcoefficienten der Ordinate der Oberfläche, die denen analog sind, welche wir zur Aufsuchung der besondern Punkte der ebenen Curven angeführt haben. Den

Leser, der sich in dieser Beziehung, so wie überhaupt über die krummen Flächen und Curven von doppelter Krümmung noch weiter unterrichten will, verweisen wir auf nachstehende Werke:

Lehrbuch der höhern Geometrie in analytischer Darstellung, von H. W. Brandes. Leipzig, 1822.

Analytische Geometrie, von Littrow. Wien, 1823.

Lehrbegriff der höheren Körperlehre, von F. S. Lubbe. Berlin, 1828.

Crelle's Journal der reinen und angewandten Mathematik. Band III und VII.

Théorie des fonctions analytiques, par La Grange.

Application de l'analyse à la Géometrie, par Monge.

Application du calcul infinitésimal à la Géometrie, par Cauchy.

Mémoire sur la courbure des surfaces, par Poisson (Crelle's Journal, Band VIII).

§. 112. Jede Curve kann als der Durchschnitt zweier Flächen $F(x, y, z)=0$, $f(x, y, z)=0$ angesehen werden. Durch successives Eliminiren der Veränderlichen y und z zwischen $F=0$ und $f=0$ erhält man die Projectionen der Curve auf den Coordinaten xz und yx. Die Gleichungen $z=\varphi x$, $y=\psi x$ für gedachte Projectionen sind zugleich jene der Cylinder, welche durch diese Projectionen senkrecht auf den zugehörigen Coordinatenebenen errichtet werden, und von welchen unsere Curve der Durchschnitt ist. Die Gleichungen der die Curve im Punkt (x, y, z) berührenden Gerade sind:

$$Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x), \quad X-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

Eliminirt man x, y, z zwischen unsern vier Gleichungen, so drückt die dadurch gewonnene Relation in X, Y, Z, die Gleichung derjenigen Fläche aus, in welchen alle Berührenden der vorgelegten Curve liegen. Aus dieser Gleichung läßt sich beurtheilen, ob unsere Curve eine ebene oder doppelt gekrümmte sei; im ersten Falle nämlich ist die erwähnte Gleichung die einer Ebene, im andern die einer krummen Fläche. Es gibt eine unendliche Anzahl von Geraden, welche durch den Berührungspunkt gehen und zugleich auf der Berührenden senkrecht sind. Der Inbegriff aller dieser Geraden bildet eine auf der Tangente senkrecht stehende Ebene, welche Normalebene heißt.

Die Gleichung derselben ist:

$$X-x+(Y-y)\frac{dy}{dx}+(Z-z)\frac{dz}{dx}=0.$$

§. 113. Eine Curve doppelter Krümmung kann mit einer Curve so wie mit einer krummen Fläche eine Berührung der ersten, zweiten... Ordnung eingehen. Ohne uns in das Detail hier weiter einzulassen, wollen wir blos die Gleichung der Krümmungsebene (Osculationsebene) der Curve suchen, d. h. derjenigen Ebene, welche letzterer an dem Punkt (x, y, z) näher als jede andere Ebene kommt. Sind nämlich $z=\varphi x$, $y=\psi x$ wieder die Gleichungen der Curve, ferner X, Y, Z die allgemeinen Coordinaten; so ist die Gleichung der durch den bestimmten Punkt (x, y, z) der Curve gelegten Ebene:

$$Z-z=A(X-x)+B(Y-y).$$

Die noch willkührlichen Größen A und B sind jetzt dergestalt zu bestimmen, daß ein engeres Anschließen der Ebene an die Curve stattfinde. Wir lassen deshalb x in $x+h$ übergehen, wodurch für die Curve die Zuwachse

$$l=h\varphi'+\frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi'' \ldots,\quad k=h\psi'+\frac{h^2}{1\cdot 2}\psi'' \ldots$$

entstehen. Setzen wir hierauf $x+h$, $y+k$, $z+l$ statt X, Y, Z in der Gleichung der Ebene, so kommt $l=Ah+Bk$, oder:

$$h\varphi'+\tfrac{1}{2}h^2\varphi''+\ldots=(A+B\psi')\,h+\tfrac{1}{2}Bh^2\psi''+\ldots$$

Hieraus entspringen die zwei Bedingungsgleichungen:

$$A+B\psi'=\psi',\quad B\psi''=\varphi'';$$

wonach man für die Gleichung der Krümmungsebene erhält:

$$\psi''(Z-\varphi)=(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')(X-x)+\varphi''(Y-\psi).$$

§. 114. Es sei nun s ein in dem Punkte (x, y, z) sich endigender Bogen irgend einer im Raume verzeichneten Curve und r die Projection desselben auf die Ebene xy. Denken wir uns nun die auf der letzteren Ebene senkrecht stehende Cylinderfläche, welche alle von den Punkten des Bogens s auf diese Ebene xy gehenden Senkrechten in sich enthält, in eine Ebene ausgebreitet, was offenbar ohne Aenderung der Längen von s und r möglich ist; so verwandelt sich r in eine gerade Linie, welche als Abscissenachse des nunmehr auf die rechtwinklichen Coordinaten r und z bezogenen Bogens s gelten

kann. Wir haben hiernach für die Fläche t des Cylinders und die Bogenlänge s die Relationen:

$$t' = z, \quad s'^2 = 1 + z'^2,$$

in welchen sich die Derivirten auf die unabhängige Veränderliche λ beziehen. Wollen wir dieselben auf die Urvariable x übertragen, so bekommen wir nach §. 41:

$$dt = z d\lambda, \quad ds^2 = d\lambda^2 + dz^2.$$

Aber λ ist in seiner ursprünglichen Gestalt ein Bogen einer ebenen Curve, welcher die rechtwinkligen Coordinaten x und y angehören; mithin $d\lambda^2 = dx^2 + dy^2$. Hieraus folgt:

$$dt = z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Drücken wir nun mittelst der Gleichungen der Curve $y = \psi x$, $z = \varphi x$ die Differentiale dz, dy durch x und dx aus; so können wir nach geschehener Integration einerseits den Flächeninhalt t des geraden Cylinders, welcher die Projection des ihn begrenzenden Bogens s zur Basis hat, und andererseits die Länge dieses rectificirten Bogens angeben.

§. 116. Wir beschäftigen uns jetzt mit der **Cubatur** und **Complanation**, d. h. mit der Berechnung des körperlichen und Flächeninhalts der krummen Oberflächen, und zwar werden wir den einfachern Fall zuerst behandeln, wo Körper und Oberfläche durch Umdrehung einer Curve um eine Achse entstanden sind.

Es sei daher das krummlinige Trapez CBMP (Fig. 1), durch dessen Umdrehung um die Achse Ax der körperliche Inhalt v erzeugt wird; ferner $y = fx$ die gegebene Gleichung der Curve CBM und $v = Fx$, wo Fx die zu bestimmende Funktion ist. Lassen wir die Abscisse um $PP' = h$ wachsen, wodurch y und v in $y + k$ und $v + i$ übergehen; so haben wir:

$$k = y'h + \ldots, \quad i = v'h + \text{ꝛc.}$$

Das Verhältniß der von den Rechtecken MPP'Q, LPP'M' während ihrer Umdrehung um die Achse Ax erzeugten Cylinder, deren Volumen $\pi y^2 h$ und $\pi(y+k)^2 h$ sind, hat die Einheit zu seiner Grenze. Allein der durch das krummlinige Trapez MM'P'P' erzeugte Cylinder liegt immer zwischen den erwähnten Cylindern; mithin hat sein Verhältniß zu einem dieser Cylinder, oder der Ausdruck:

$$\frac{i}{\pi y^2 h} = \frac{v' + \text{ꝛc.}}{\pi y^2}$$

auch die Einheit zur Grenze: es ist folglich $v' = \pi y^2$.

§. 116. Bezeichnet man ferner die durch Umdrehung der Curve CBM entstandene Oberfläche durch $u = \varphi x$, wo φx die zu bestimmende Function ist, und nennt man $l = \varphi(x+h) - \varphi x$ die durch den Bogen MM' hervorgebrachte Zone: so hat man nach der Taylor'schen Reihe:

$$l = u'h + \text{ꝛc.}$$

Die Oberflächen der von der Sehne MM' und der Tangente MH beschriebenen abgestumpften Kegel sind nun:

$$\pi(2y + k)MM' \text{ und } \pi(2y + y'h)HM,$$

welche Ausdrücke sich fortwährend der Gleichheit nähern, da das Verhältniß $\frac{MM'}{HM}$ die Einheit zur Grenze hat (§. 81). Das Verhältniß

$$\frac{\pi(2y + k)\,MM'}{l} = \frac{\pi(2y + k)\sqrt{(1 + y'^2 + y'y''h \ldots}}{u' + \frac{1}{2}u''h + \ldots}$$

wird daher ebenfalls die Einheit zur Grenze haben, weil die Zone l jederzeit zwischen den Oberflächen der beiden abgestumpften Kegel enthalten ist. Folglich:

$$u' = 2\pi y\sqrt{(1 + y'^2)} = 2\pi y s'.$$

Um zu den ursprünglichen Funktionen v und u zu gelangen, wird man daher fx statt y in die obenstehenden Werthe v' und u' setzen und dann die Integration vornehmen.

§. 117. Wir gehen jetzt zur Cubatur und Complanation eines Körpers mit krummer Oberfläche $z = f(x, y)$ überhaupt über. Indem wir durch einen beliebigen Punkt $M(x, y, z)$ der Fläche (Fig. 37) die Ebenen MPE und MPG den Coordinatenebenen xz und yz respectiv parallel legen, entsteht der körperliche Abschnitt MNEF, welcher seine Basis in der Ebene xy hat und einerseits durch die vier genannten Ebenen, andererseits durch die krumme Oberfläche begrenzt wird. Das mit V bezeichnete Volumen dieses Körperstücks ist offenbar eine Funktion von x und y, um deren Bestimmung es sich jetzt handelt. Wir lassen deshalb x um $GG' = h$ und y um $EE' = k$ zunehmen, ferner legen wir wieder durch G' und E' die Ebenen G'BCS und E'DCS mit yz und xz parallel.

Der zwischen den Ebenen ME, SD, FM, CB enthaltene Zuwachs unsers Körpers hat hiernach folgenden Ausdruck:

$$\frac{dV}{dx}h + \frac{dV}{dy}h + \frac{d^2V}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^2V}{dx\,dy}hk + \frac{d^2V}{dy^2}\frac{k^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Unser Körper wächst, wenn blos x in x+h übergeht, und y unverändert bleibt, um das Stück

$$MPRBF = \frac{dV}{dx}h + \frac{d^2V}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{rc.};$$

dagegen wächst derselbe, wenn blos y um k zunimmt, um das Stück

$$PEDMQ = \frac{dV}{dy}k + \frac{d^2V}{dy^2}\frac{k^2}{2} + \text{rc.}$$

Durch Subtraktion der letztgenannten Körpersegmente von dem erstern entsteht das Körperstück:

$$MCRQ = \frac{d^2V}{dx\,dy}hk + \text{rc.}$$

Die beiden rechtwinkligen Parallelepipede hkz und hk(z+l) nähern sich immer mehr der Gleichheit, in dem Maße als h und k kleiner werden; das Verhältniß

$$\frac{\frac{d^2V}{dx\,dy}kh + \text{rc.}}{khz} = \frac{\frac{d^2V}{dx\,dy} + \text{rc.}}{h}$$

wird daher die Einheit zur Grenze haben; folglich $\frac{d^2V}{dx\,dy} = z$.

Um den Körperinhalt V zu bekommen, muß man daher für z seinen Werth f(x, y) setzen und hierauf zweimal integriren, erstens in Bezug auf x, indem man y als unveränderlich ansieht, das erhaltene Resultat dann von Neuem in Bezug auf y allein.

§. 118. Für die Bestimmung der Oberfläche des Körpers MNEF, welche wir mit U bezeichnen wollen, soll genau die vorige Construction gelten.

Das krummflächige Viereck MC des Körpers, welcher in der Figur 38 besonders dargestellt worden, wird durch den Ausdruck $\frac{d^2U}{dx\,dy}hk + \text{rc.}$ repräsentirt. Denken wir uns nun an die krumme Fläche in M eine Berührungsebene gelegt, so wird auf der letztern durch die vier Ebenen MR, MQ, QC, RC ein Parallelogramm Mq's'r'

gebildet, dessen Projektion auf der Coordinatenebene xy das Rechteck PQSR=hk ist. Da sich der Inhalt jeder ebenen Figur zu demjenigen ihrer Projektion wie 1 zum Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen verhält, ferner der Cosinus des Winkels gedachter Berührungsebene mit der Coordinatenebene xy $=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ ist; so ergibt sich für den Inhalt des Parallelogramms Mr′s′q′ der Ausdruck:

$$hk:\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}=hk\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Da diese Größe und $\frac{d^2U}{dx\,dy}hk+$ ꝛc. in einem Verhältniß stehen, welches die Einheit zur Grenze hat; so ist

$$\frac{d^2U}{dx\,dy}=\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Um eine gegebene Oberfläche $z=f(x,y)$ zu complaniren, muß man daher die partiellen Differentialcoefficienten p und q suchen, ihre Werthe in die vorige Formel substituiren, und hierauf die Integration, wie hier oben angedeutet worden, vornehmen.

Anmerkung. Indem wir hiermit die Differentialrechnung beschließen, glauben wir, folgende, als vielfache Gelegenheit zur Uebung der vorgetragenen Lehren darbietende Werke, empfehlen zu müssen:

1. Vor allen die treffliche Beispiel- und Aufgabensammlung über die Lehren des Differential-, Integral- und Variationskalkuls, von G. Strauch. Erlangen, bei Palm und Enke.
2. Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung, von F. W. Hesselbarth. Dresden, bei Arnold.
3. Aufgaben der höhern und angewandten Mathematik, von Lehmus. Berlin, bei Dunker und Humblot.
4. Uebungsaufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten, von Lehmus. Berlin, bei Reimer.
5. Die schon citirte Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie, von Magnus.
6. Desgleichen Puissants Sammlung verschiedener Aufgaben aus der Geometrie.

Drittes Kapitel.

Integration der Funktionen einer Veränderlichen.

Einfachste Integralformeln.

§. 119. Die Integralrechnung hat zum Zweck, von den Derivirten oder Differentialen zu ihren primitiven Funktionen zurückzukehren; mit Hülfe einiger Fundamentalformeln und schicklicher Transformationen gelangt man zu diesem Ziele. Um die Aenderungen, welche mit den Formeln in Folge der Verwechslungen der unabhängigen Veränderlichen vorgenommen werden müßten, zu vermeiden, werden wir uns der von Leibnitz eingeführten Zeichen bedienen. Die zur Auffindung der primitiven Funktion erforderliche Rechnungsoperation heißt das Integriren, und die gefundene Funktion das Integral des gegebenen Differentials. Zur Bezeichnung der Integralien bedient man sich des Buchstabens $\int$, welchen man den zu integrirenden Differentialen vorsetzt. Hiernach schreibt man z. B. statt $y'=4x^3$, der Derivirten von x^4+c, das Differential $dy=4x^3dx$; woraus $y=\int 4x^3dx=x^4+c$.

Die Zeichen d und $\int$ bedeuten folglich entgegengesetzte Rechnungsoperationen, und heben sich gegenseitig auf.

Anmerkung. Leibnitz wählte den Buchstaben $\int$ als den Anfangsbuchstaben des Wortes Summe, indem er sich das Differential als einen unendlich kleinen Zuwachs der Veränderlichen vorstellte, so daß die letztere die Summe der unendlich großen Anzahl von jenen Zuwachsen ist, welche sie von ihrem Ursprung bis zu dem Moment, wo man sie betrachtet, erhalten hat.

§. 120. Wir wollen zunächst die Relation aufsuchen, welche zwischen den primitiven Funktionen fx und Fx stattfinden muß, wenn sie dieselbe Derivirte y' haben. Der Taylor'sche Lehrsatz gibt zu diesem Behuf:

$$f(x+h)=fx+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots,$$
$$F(x+h)=Fx+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2\ldots; \text{ mithin}$$
$$f(x+h)-F(x+h)=fx-Fx.$$

Hieraus geht hervor, daß $fx-Fx$ keine Aenderung, bei dem Uebergang von x in $x+h$ erleidet, oder mit andern Worten, die Größe $fx-Fx$ behält denselben Werth, was x auch sein mag, oder es ist $fx=Fx+C$. Alle primitiven Funktionen, welche einerlei Derivirte haben, sind folglich nur hinsichtlich des unveränderlichen Theils von einander verschieden. Hieraus sieht man, warum man jedem gefundenen Integral eine willkürliche Constante, welche gewöhnlich mit C bezeichnet wird, hinzufügen müsse, wenn es die allgemeinste Form, deren es fähig ist, erhalten soll.

§. 121. Die unmittelbare Betrachtung der Differentiale der Funktionen mit einer veränderlichen Größe führt sofort zur Kenntniß folgender Fundamentalformeln der Integralrechnung.

1. Das Integral einer Summe von Differentialen ist gleich der Summe der Integrale von den einzelnen Differentialen; das Zeichen und der Coefficient eines jeden Gliedes bleibt dabei unverändert.

Anmerkung. Dem Integral der Summe mehrerer Differentiale wird nur eine Constante hinzugefügt, weil man bald einsieht, daß, wenn für jedes einzelne Differential eine hinzugefügt würde, dieselben zusammengenommen doch nur einer einzigen gleich kämen, welche ihre Summe ausmachte.

2. Um $z^n\,dz$ zu integriren, muß man den Exponenten um die Einheit vermehren, alsdann durch diesen neuen Exponenten dividiren und den Faktor dz weglassen. So ist:

$$\int Az^n\,dz=\frac{Az^{n+1}}{n+1}+C. \text{ Desgleichen}$$

$$\int Az^{-n}dz=-\frac{A}{(n-1)z^{n-1}}+C.$$

Diese Regel kann man auch auf solche Funktionen anwenden, die sich auf die Form $z^n\,dz$ bringen lassen. Für $ax^{n-1}dx(b+cx^n)^m$ bemerken wir vorerst, daß $ncx^{n-1}dx$ das Differential von $b+cx^n$ ist.

Da nun der erste Faktor sich bloß durch die Constante a von jenem Differential unterscheidet, so suchen wir zuvörderst, ihm diese Constante zu verschaffen, d. h. wir schreiben:

$$\frac{a}{nc} \cdot ncx^{n-1}dx(b+cx^n)^m = \frac{a}{nc} z^m dz,$$

wo $b+cx^n = z$ gesetzt worden.

Daraus entspringt das Integral:

$$\frac{az^{m+1}}{nc(m+1)} + C = \frac{a}{nc(m+1)}(b+cx^n)^{m+1} + C.$$

Die hier vorgenommene Transformation, durch welche z eingeführt wurde, ist keinesweges nothwendig; es ist vielmehr zweckmäßig, sie in der Folge ganz zu umgehen, weil sie die Rechnung nur in die Länge zieht.

Auf dieselbe Weise findet man:

$$\int 6\sqrt{[(4x^2+3)]}\cdot xdx = \tfrac{1}{2}(4x^2+3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

3. Unsere vorige Regel gilt, was auch der Exponent m sein mag, den einzigen Fall ausgenommen, wo $m=-1$, weil man $\int z^{-1}dz = \infty$ findet.

Dieser Umstand rührt daher, weil dann das Integral einer andern Gattung von Funktionen angehört, und in der That haben wir

$$\int \frac{dz}{z} = lz + C. \quad \text{Eben so ist} \int \frac{dz}{a+z} = l(a+z)+C.$$

Jeder Bruch, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, hat folglich zum Integral den Logarithmen dieses Nenners. In ähnlichen Fällen werden wir in der Folge, der bequemern Rechnung halber, die willkührliche Constante unter der Form lC ansetzen.

Um $\frac{5x^3dx}{3x^4+7}$ zu integriren, bemerken wir, daß sich dieser Bruch, den constanten Faktor 5 abgerechnet, der vorigen Regel anschließt. Dies in Erwägung genommen, haben wir:

$$\int \frac{5}{12} \cdot \frac{12x^3\,dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12} l[C(3x^4+7)].$$

4. Aus $\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C$ folgt, daß jeder Bruch, dessen Nenner

eine Quadratwurzelgröße darstellt und dessen Zähler das Differential der mit jenem Wurzelzeichen behafteten Funktion ist, das Doppelte des Nenners zum Integral hat. So ist:

$$\int \frac{-xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \sqrt{(a^2-x^2)} + C.$$

5. Eine der wichtigsten hierhergehörigen Regeln ist die sogenannte theilweise Integration. Sind nämlich u und t beliebige Funktionen von x, so hat man:

$$d(ut) = udt + tdu;$$

mithin, wenn zur Integration geschritten wird,

$$ut = \int udt + \int tdu; \text{ und}$$
$$\int udt = ut - \int tdu.$$

Hieraus folgt, daß, wenn sich ein Differential in zwei Faktoren zerlegen läßt, wovon der eine integrirbar wird, man integriren kann, indem man den andern als constant betrachtet; von dem so gewonnenen Resultat hat man aber dann das Integral desjenigen Differentials abzuziehen, welches man durch Differentiation jenes Resultats erhält, wobei jedoch die früher als constant betrachtete Funktion veränderlich anzunehmen ist. Um z. B. $lx\,dx$ zu integriren, sehen wir nur dx als veränderlich an. Durch Integration entsteht xlx, welches Resultat in Bezug auf lx allein differentiirt, nach unserer Regel liefert:

$$\int lx \cdot dx = x \cdot lx - \int x \frac{dx}{x} = xlx - x + C.$$

Diese Regel bietet uns demnach ein Mittel dar, ein vorgelegtes Integral auf ein einfacheres zurückzuführen.

6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C; \int e^x\,dx = e^x + C.$

7. $\int \sin xdx = -\cos x + C; \int \cos \cdot xdx = \sin \cdot x + C;$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang \cdot x + C.$$

8. $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \text{arc}(\sin = z) + C$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}(\text{tg} = z) + C.$$

Um $\frac{mdz}{a+bz^2}$ zu integriren, dividirt man oben und unten durch a, wodurch entsteht:

$$\frac{m}{a} \cdot \frac{dz}{1+\frac{bz^2}{a}} = \frac{m}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \frac{dt}{1+t^2},$$

wenn $\frac{bz^2}{a} = t^2$ gesetzt wird. Das Integral der letztern Differentialfunktion ist:

$$\frac{m}{\sqrt{ab}} \cdot \text{arc}\,(\text{tg}=t) + C; \text{ folglich:}$$

$$\int \frac{mdz}{a+bz^2} = \frac{m}{\sqrt{ab}} \cdot \text{arc}\left(\text{tg}=z\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Ebenso findet man:

$$\int \frac{mdz}{\sqrt{(a^2-bz^2)}} = \frac{m}{\sqrt{b}} \text{arc} = \left(\sin \frac{z}{a}\sqrt{b}\right) + C.$$

Integration der rationalen Funktionen.

§. 122. Da jede gebrochene rationale Funktion $\frac{N}{D} \cdot dx$, wie in der höhern Algebra §. 166 nachgewiesen worden, in eine ganze Differentialfunktion Qdx und in Partialbrüche von den Formen:

$$\frac{A}{x-a}dx, \quad \frac{A}{(x-a)^n}dx, \quad \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}, \quad \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}$$

zerlegt werden kann, wobei A, B, p, q, n constante Größen darstellen und die Faktoren von x^2+px+q imaginär sind; so handelt es sich jetzt blos darum, Regeln aufzufinden, um von jenen Differentialformeln zu ihren ursprünglichen Ausdrücken zurückzukehren. Macht man in den zwei letzten Partialbrüchen $x=z-\frac{1}{2}p$, ferner $\beta^2=q-\frac{1}{4}p^2$, was der Annahme zufolge eine positive Größe ist; so hat man:

$$\frac{Az+B'}{z^2+\beta^2}dz \text{ und } \frac{Az+B'}{(z^2+\beta^2)^n}dz, \text{ wo } B'=B-\frac{Ap}{2}.$$

Schreiten wir daher zur Integration der beiden ersten und dieser zwei letzten Differentialformeln.

Erster Fall. Da bei dem Bruche $\frac{A\,dx}{x-a}$ der Zähler, abgesehen

von dem constanten Faktor, das Differential des Nenners ist; so hat man:

$$\int\frac{A dx}{x-a}=Al(x-a)+C=Alc(x-a)$$

Beispiele. 1. Um das Integral von $\frac{dx}{a^2-x^2}$ zu bestimmen, findet man:

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right);\text{ folglich:}$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{a+x}+\int\frac{dx}{a-x}\right)+C=\frac{1}{2a}\ l\ \frac{c(a+x)}{a-x}.$$

2. Ebenso ist:

$$\int\frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2}=\int\frac{2\,dx}{2-x}-\int\frac{2\,dx}{x+1}=l\,\frac{c}{(x^2-x-2)^2}.$$

Zweiter Fall. Es ist:

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=\frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C,$$

was sich sofort aus der Regel 2 ergibt.

Beispiele: 1. Für das Integral von $\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx$ bekommt man:

$$\int\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx=\int dx\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}-\frac{\frac{5}{4}}{x+1}\right).$$

Werden diese einzelnen Integrale bestimmt, so erhält man:

$$\int\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}\,dx=2lx-\frac{1}{x-1}-\tfrac{1}{4}l(x-1)+\frac{1}{2(x+1)}-\tfrac{5}{4}l(x+1)+C.$$

2. Auf dieselbe Weise findet man:

$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2+x}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(1+x)^2}-\int\frac{dx}{1+x}=\frac{1}{1+x}+l\frac{x}{1+x}+C.$$

Dritter Fall. Was den Bruch $\frac{Az+B}{z^2+\beta^2}\,dz$ betrifft, so integrirt man dessen ersten Theil $\frac{Az\,dz}{z^2+\beta^2}$ nach der Regel 3 und zweiten Theil $\frac{Bdz}{z^2+\beta^2}$ nach der Regel 8.

Man findet hiernach:

$$\int\frac{Az+B}{(z^2+\beta^2)}\,dz=\tfrac{1}{2}Al\,(z^2+\beta^2)+\frac{B}{\beta}\text{ arc }\left(\tang=\frac{z}{\beta}\right).$$

Beispiele: 1. Für $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$ erhält man:

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{x-1} - \int \frac{\frac{1}{3}(x-1)\,dx}{x^2+x+1},$$

wovon das erste Partialintegral bekannt ist. Um das zweite zu bestimmen, mache man $x = z - \frac{1}{2}$, was gibt:

$$-\int \frac{\frac{1}{3}z\,dz}{z^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z^2+\frac{3}{4}}.$$

Das eine dieser Integrale ist:

$= -\frac{1}{6}l(z^2+\frac{3}{4}) = -\frac{1}{3}l\sqrt{(x^2+x+1)}$; das andere ist:

$= \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2z}{\sqrt{3}}\right)$. Man hat folglich:

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left[lc(x-1) - l\sqrt{(x^2+x+1)} + \sqrt{3}\cdot\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

2. Ebenso findet man:

$$\int \frac{(x^2-x+1)dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int \frac{3}{2}\frac{dx}{x+1} - \int \frac{1}{2}\frac{dx(x+1)}{x^2+1}$$

$$= l\frac{c\sqrt{[(x+1)^3]}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}} - \frac{1}{2}\text{arc}\,(\text{tang} = x).$$

Vierter Fall. Die Aufgabe ist hier, eine Reihe von Brüchen von der Form $\frac{(Az+B)}{(z^2+\beta^2)^n}dz$ zu integriren, wo n successive $= 1, 2, 3 \ldots$ ist. Wir zerfällen zu diesem Behufe jeden Bruch in seine zwei Theile $\frac{Az\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}$ und $\frac{Bdz}{(z^2+\beta^2)^n}$. Der erste Theil läßt sich unmittelbar integriren und gibt $\frac{-A}{2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}}$ als Resultat. Für $n=1$ hingegen hat man $\frac{1}{2}A\,l(z^2+\beta^2)$ als Integral.

Anmerkung. Macht man $z^2+\beta^2 = t^2$, so reducirt sich der Bruch auf das Monom $\frac{Adt}{t^{2n-1}}$, dessen Integral $\frac{-A}{2(n-1)t^{2(n-1)}}$ ist.

§. 123. Was den andern Theil $\frac{Bdz}{(z^2+\beta^2)^n}$ anbelangt, so wird dessen Integration von derjenigen der Formel $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$, worin

der Exponent des Nenners um eine Einheit kleiner ist, abhängig gemacht. Wir setzen deshalb:

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}=\frac{Kz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}+\int\frac{Ldz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}},$$

wo K und L unbestimmte Coefficienten sind. Um dieselben zu finden, differentiiren wir die letztere Gleichung und bringen Alles auf einerlei Benennung.

Es entsteht dadurch:

$$1=K(z^2+\beta^2)-2K(n-1)z^2+L(z^2+\beta^2),$$

woraus sich durch Vergleichung der gleichnamigen Glieder die Relationen ergeben:

$$K+L=2K(n-1),\ (K+L)\beta^2=1.$$

Substituirt man die hieraus gefundenen Werthe von K und L in die oben angeschriebene Gleichung, so findet man endlich:

$$\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}=\frac{z}{2(n-1)\beta^2(z^2+\beta^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}.$$

Der Gebrauch dieser Gleichung ist nun leicht einzusehen. Hat man nämlich eine Anzahl von Brüchen von der Form $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^i}$, so wird man zuvörderst zu der Integration desjenigen schreiten, worin i den größten Werth n hat. Vermöge der letzten Formel wird dann unser Bruch durch zwei andere ersetzt, wovon der eine ein algebraischer Ausdruck ist und der zweite von der Form $\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$ sich mit dem nächstfolgenden Bruch gedachter Reihe vereinigt. Die in der Formel angedeutete Verfahrungsweise wird so fortgesetzt, bis man zu dem Integral $\int\frac{dz}{z^2+\beta^2}$ gelangt, welches bekannt ist.

Anmerkungen: 1. Die Richtigkeit der hier oben angenommenen Gleichung wird durch die Rechnung, welche zur Auffindung der Werthe von K und L dient, bestätigt. Einige Bekanntschaft mit der Analysis gibt uns übrigens dergleichen Transformationen an die Hand; eine solche Bekanntschaft zeigte hier bald, daß das Resultat blos Glieder von zweierlei Art enthalten könnte, nämlich die einen constant, und die andern, welche z^2 als Faktor haben.

2. Aus der Zusammenstellung unserer vier Fälle ergibt sich, daß die Differentiale, welche unter der Gestalt rationaler Brüche vorkommen, immer entweder algebraisch, oder mittelst der Logarithmen oder Kreisfunktionen integrirt werden können. Die Integration von derlei Funktionen bietet demnach keine weitere Schwierigkeit dar, als diejenige etwa, welche die Auflösung des Nenners in seine einfache Faktoren mit sich bringen mag.

Beispiele: 1. Für $\frac{(x^4+2x^3+3x^2+3)dx}{(x^2+1)^3}$ hat man die gleichgeltende Summe der Partialbrüche, nämlich:

$$\frac{(-2x+1)\,dx}{(x^2+1)^3}+\frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2}+\frac{dx}{x^2+1}.$$

Das erste Glied der beiden erstern liefert:

$$\int\frac{-2xdx}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{2(x^2+1)^2},\int\frac{2xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{x^2+1}.$$

Hinsichtlich der zweiten Glieder gibt unsere Formel:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4\,(x^2+1)^2}+\tfrac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Wird nun das letzte Glied zum zweiten Glied des zweiten Partialbruches addirt, so erhält man das Resultat $\frac{7}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Unsere Formel auf dasselbe in Anwendung gebracht, liefert:

$$\tfrac{7}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{7x}{8(x^2+1)}+\tfrac{7}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Indem das letzte Glied zu dem dritten Partialbruch addirt wird, findet man:

$$\tfrac{15}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}=\tfrac{15}{8}\,\text{arc}\,(\text{tang}=x).$$

Durch Vereinigung dieser verschiedenen Theile gelangt man zu dem Endresultate:

$$\int\frac{(x^4+2x^3+3x^2+3)dx}{(x^2+1)^3}=\frac{2+x}{4\,(x^2+1)^2}+\frac{7x-8}{8(x^2+1)}+\tfrac{15}{8}\,\text{arc}\,(\text{tang}=x)+C.$$

2. Auf ähnliche Weise findet man das Integral von:

$$\frac{dx}{(1+x)x^2(x^2+2)\,(x^2+1)^2}$$

$$=dx\left(\frac{1}{12(1+x)}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{x-1}{x^2+2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{(x^2+1)^2}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}\right).$$

Die einzigen Glieder, deren Integration einige Schwierigkeit darbieten können, sind:

$$\int \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \tfrac{1}{4} \cdot \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= c - \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \tfrac{1}{8}\, l\,(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\,\text{arc}\,(\text{tang} = x):$$

3. Man hat: $\int \frac{b^3 dx}{x^6 - a^6} = \frac{b^3}{3a^6} \Big\{ \log \sqrt{\left(\frac{(x-a)(x^2-ax+a^2)}{(x+a)(x^2+ax+a^2)}\right)}$

$$- \sqrt[1]{3} \left[\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2x-a}{a\sqrt{3}}\right) + 3\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}\right)\right] + C \Big\}.$$

4. Desgleichen:

$$\int \frac{x^3-6x^2+4x-1}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6}\,dx = \log \frac{(x-2)\sqrt{(x+1)}}{x-3} + \frac{1}{x+1} + C.$$

Integration der irrationalen Funktionen.

§. 124. Die irrationalen Funktionen, welche sich durch schickliche Transformationen rational machen lassen, können als integrirt angesehen werden.

Beispiele: 1. Um das Integral von

$$\frac{\sqrt[3]{x} + x\sqrt{x} + x^2}{x + \sqrt{x}}\,dx$$

zu finden, setze man $x = z^6$. Die angedeuteten Ausziehungen lassen sich dann bewerkstelligen, und man erhält die Differentialformel:

$$6dz \cdot \frac{z^{14}+z^{11}+z^4}{z^3+1} = 6z^{11}dz + 6z\,dz - \frac{6z\,dz}{z^3+1},$$

deren Integration keine Schwierigkeit darbietet.

2. Für $\frac{\sqrt{x} \cdot dx}{x-1}$ setze man $x = z^2$. Es entsteht dann:

$$\int \frac{2z^2dz}{z^2-1} = 2\int dz + \int \frac{2\,dz}{z^2-1} = 2z + l\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + c.$$

§. 125. Wir betrachten jetzt die irrationale Funktion, welche blos die Wurzelgröße $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$ enthält und entweder die Form:

$$X dx \sqrt{(A+Bx+Cx^2)} \text{ oder } \frac{X dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$$

hat, wo X eine rationale Funktion von x bedeutet. Es ist zunächst zu bemerken, daß sich die erstere auf die zweite zurückführen läßt; denn sie läßt sich, wenn man sie mit $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$ multiplicirt und dividirt, folgendermaßen schreiben,

$$\frac{Xdx(A+Bx+Cx^2)}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}},$$

wo der Zähler des Resultats eine rationale Funktion wie bei der andern ist.

Nachdem der Ausdruck $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$ auf die Form $\sqrt{C}\sqrt{(a+bx+x^2)}$ gebracht worden, wo man der Abkürzung halber $\frac{B}{C}=b$, $\frac{A}{C}=a$ gesetzt hat, sind zwei Fälle zu behandeln, nämlich der, wo x^2 mit dem positiven, und der, wo es mit dem negativen Zeichen behaftet ist.

Im erstern Falle mache man $\sqrt{(a+bx+x^2)}=z\pm x$, woraus:

$$x=\frac{z^2-a}{b\mp 2z},\ dx=\frac{bz\mp(z^2+a)}{(b\mp 2z)^2}\cdot 2dz,$$

$$\sqrt{(a+bx+x^2)}=z\pm x=\frac{bz\mp(z^2+a)}{b\mp 2z}.$$

Vermittelst dieser Werthe reducirt man das Differential $\frac{Xdx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}}$ auf ein anderes von der Form Zdz, wo Z eine rationale Funktion von z darstellt.

Beispiele: 1. Für $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+x^2)}}$ bekommt man, wenn die untern Zeichen genommen werden:

$$\int\frac{2dz}{2z+b}=l(2z+b)+C=l\,[c(x+\tfrac{1}{2}b+\sqrt{[a+bx+x^2]})].$$

Folglich auch $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm a^2)}}=l\,[c(x+\sqrt{[x^2\pm a^2]})]$.

2. Um $dy=dx\sqrt{(a^2+x^2)}$ zu integriren, mache man $\sqrt{(a^2+x^2)}=z-x$. Daraus wird $dy=zdx-xdx$, mithin $y=-\frac{1}{2}x^2+\int zdx$. Setzt man statt dx seinen hier oben gefundenen Werth und integrirt, so kommt $\int zdx=\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{2}a^2lz$. Es ist daher endlich:

$$y=c+\tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2+x^2)}+\tfrac{1}{2}a^2l\,[x+\sqrt{(a^2+x^2)}].$$

3. Für $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, oder $dy\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$

erhält man $y\sqrt{-1} = l[(x+\sqrt{(x^2-1)}] + C.$

Es ist aber $x = \cos y$, $\sqrt{(x^2-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sin y$: ferner $c=0$, weil $x=1$ die Größe y zum Verschwinden bringt. Hieraus entspringt die in der höhern Algebra aufgeführte Relation:

$$\pm y\sqrt{-1} = l(\cos y \pm \sqrt{-1} \cdot \sin y)$$

§. 126. Was den zweiten Fall anlangt, so kann man die vorhergehende Methode ohne Einführung von imaginären Größen nicht anwenden. Die Faktoren des Trinoms $a+bx-x^2$ müssen jedoch reell sein, widrigenfalls es sich für jeden beliebigen Werth von x negativ herausstellen würde. Die Wurzelgröße wäre dann imaginär und man müßte, wie in dem letzten Beispiele, $\sqrt{-1}$ als Faktor herausschreiben, weil sich kein reelles Integral auffinden ließe worauf man wieder auf den vorhin behandelten Fall zurückkäme. Bezeichnen jetzt α und β die zwei reellen Wurzeln von $x^2-bx-a=0$, so ist es klar, daß

$$\sqrt{(a+bx-x^2)} = \sqrt{[(x-\alpha)(\beta-x)]}.$$

Macht man hierauf $\sqrt{[(x-\alpha)(\beta-x)]} = (x-\alpha)z$, und erhebt zum Quadrat: so hat man nach Hinweglassung des gemeinsamen Faktors $x-\alpha$ die Relation: $\beta-x = (x-\alpha)z^2$. Hieraus:

$$x = \frac{\alpha z^2+\beta}{z^2+1},\ (x-\alpha)z = \frac{(\beta-\alpha)z}{z^2+1} \text{ und } dx = \frac{2(\alpha-\beta)zdz}{(z^2+1)^2},$$

welche Werthe das gegebene Differential ebenfalls rational machen.

Dies Verfahren kann man gleich bequem auf den ersten Fall anwenden, wenn nur α und β reell sind.

Anmerkung. Es ist einleuchtend, daß die Differentialformel, wenn sie statt $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$ jede andere Potenz von dieser Wurzelgröße enthalten sollte, durch die nämlichen Umwandlungen rational gemacht wird.

Beispiele: 1. Man findet so:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx-x^2)}} = c - 2 \cdot \text{arc}\left[\text{tang} = \sqrt{\left(\frac{\beta-x}{x-\alpha}\right)}\right].$$

2. Für $\frac{dx}{\sqrt{(1-x)^2}}$ dessen Integral dem Bogen gleichkommt, der x zum Sinus hat, mache man $\sqrt{(1-x^2)} = (1-x)z$.

Daraus folgt:

$$x = \frac{z^2-1}{z^2+1},\ dx = \frac{4z\,dz}{(z^2+1)^2};\ \text{mithin:}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int\frac{2dz}{z^2+1} = c+2\,\mathrm{arc}(tg=z),\ \text{oder:}$$

$$\mathrm{arc}(\sin = x) = -\tfrac{1}{2}\pi + 2\cdot\mathrm{arc}\left[tg = \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right].$$

3. Für $dy = dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ mache man $\sqrt{(a^2-x^2)} = (a-x)z$. Daraus ergibt sich:

$$dy = \frac{8a^2z^2dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{8a^2dz}{(1+z^2)^3} + \frac{8a^2dz}{(1+z^2)^2}.$$

Ferner durch Integration:

$$y = -\frac{2a^2z}{(1+z^2)^2} + \frac{a^2z}{1+z^2} + a^2\cdot\mathrm{arc}(tg=z)+C;\ \text{oder:}$$

$$y = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2\cdot\mathrm{arc}\left[tg = \sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)} + C\right].$$

§. 127. Die durch vielfache Uebung erlangte Gewandtheit zeigt die für jeden einzelnen Fall passendsten Transformationen an. So könnte man im Beispiele des vorhergehenden Paragraphen das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen wegschaffen, wodurch die Wurzelgröße die Form $\sqrt{(z^2 \pm a^2)}$ oder $\sqrt{(a^2 \pm z^2)}$ bekäme, so daß man Glieder wie $\frac{z^m dz}{\sqrt{(z^2 \pm a^2)}}$ oder $\frac{z^m dz}{\sqrt{(a^2 \pm z^2)}}$ zu integriren hätte.

Im letztern Falle verschwindet die Irrationalität, wenn man $\sqrt{(a^2 \pm z^2)} = a - uz$ setzt, weil das Quadrat dieser Gleichung durch z theilbar wird. Hierdurch entsteht:

$$z = \frac{2au}{u^2 \mp 1},\ dz = -2a\,du\cdot\frac{u^2 \pm 1}{(u^2 \mp)^2}.$$

Auf diese Art verwandelt sich $\frac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$ in $\frac{-dz}{\sqrt{(b^2 - z^2)}}$, wenn $x = b - z$ gemacht wird; das Integral ist demnach:

$$c + \mathrm{arc}\left(\cos = \frac{z}{b}\right) = c + \mathrm{arc}\left(\cos = \frac{b-x}{b}\right).$$

Man hätte auch die vorhergehende Transformation anwenden können, wodurch entstanden wäre:

$$-\int\frac{2du}{u^2+1} = c' - 2\cdot\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = u).$$

Setzt man $x=z-a$ in $dy=\frac{adx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$ so kommt $dy=\frac{adz}{\sqrt{(z^2-a^2)}}$, dessen Integral ist:

$$y=al[c(x+a+\sqrt{[2ax+x^2]})].$$

Diese Gleichung gehört der sogenannten Kettenlinie an. Man vergleiche hiermit: Poissons Lehrbuch der Mathematik, übersetzt von M. v. Stern, ferner Möbius Lehrbuch der Statik, zweiter Band.

Anmerkung. Durch geeignete Operationen lassen sich zuweilen Differentialformeln dergestalt umformen, daß man ihr Integral mittelst der bisher auseinandergesetzten Methoden finden kann. Für $dy=\frac{dx}{(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ multiplicire man Zähler und Nenner mit $(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}$; desgleichen multiplicire man in $dy=\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$ oben und unten mit $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$: mit beiden Resultaten wäre dann, wie oben angegeben, zu verfahren.

Integration der binomischen Differentialen.

§. 128. Die Differentialformel $Kx^m(a+bx^n)^p$, wo m, n, p, beliebige ganze oder gebrochene, positive oder negative Größen bezeichnen, verdient wegen ihres häufigen Vorkommens eine besondere Betrachtung. Außer den zwei Fällen, in denen entweder p eine ganze positive Zahl, oder $x^m dx$ das Differential von x^n ist, gibt es noch zwei andere, in welchen das Integral jener Differentialformel gefunden werden kann. Setzt man nämlich $z=a+bx^n$, so folgt:

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad x^m dx=\frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{nb^{\frac{m+1}{n}}}dz;$$

mithin, wenn man diese Werthe substituirt:

$$Kx^m dx(a+bx^n)^p=\frac{K}{nb^{\frac{m+1}{n}}}(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}z^p\,dz.$$

Der letzte Ausdruck läßt sich integriren, im Fall der Exponent von $z-a$ eine ganze Zahl wird. Wenn $\frac{m+1}{n}=1$ ist, hat man $z^p dz$ zu integriren; wenn $\frac{m+1}{n}-1=$ einer positiven Zahl h ist, bekommt man nach der Entwicklung von $(z-a)^h z^p dz$ eine Reihe von Monomen; wenn endlich $\frac{m+1}{n}-1$ negativ ist, erhält man einen rationalen Bruch. Die vorgelegte Differentialformel kann also immer integrirt werden, wenn der außerhalb des Binoms befindliche Exponent von x, um die Einheit vermehrt, durch den Exponenten von x innerhalb des Binoms theilbar wird.

Anmerkung. Wenn p sich als eine gebrochene Zahl $\frac{r}{q}$ herausstellt, welches hier der wichtigere Fall ist, indem man sonst blos eine Reihe von Monomen zu integriren hätte, läßt sich die Rechnung mittelst der Relation $a+bx^n=z^q$ noch leichter ausführen.

§. 129. Dividirt man dagegen das vorgelegte Binom durch x^n und multiplicirt außerhalb des Binoms durch x^{np}, so wird:

$$Kx^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx.$$

Wendet man nun das vorhin gewonnene Resultat auf diesen letzten Ausdruck an, so zeigt es sich, daß die vorgelegte Differentialformel auch einer rationalen Form fähig wird, wenn $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze Zahl darstellt.

Anmerkung. Zu dieser Regel wäre man unmittelbar gelangt, wenn man, wie Euler gethan, $a+bx^n=x^n z^q$ gemacht hätte, wo q wieder den Nenner der gebrochenen Zahl p bedeutet.

§. 130. Zur Erläuterung dieser beiden Methoden mögen folgende Beispiele dienen:

1. Für $x^3dx\sqrt{[(1-x^2)]}$ ist $\frac{m+1}{n}=2$. Man setze daher $1-x^2=z$; es entsteht dann:

$$\int x^3dx\sqrt{(1-x^2)}=-\tfrac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}(1-z)dz=-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-\tfrac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right)+c.$$
$$=\tfrac{1}{5}\sqrt{[(1-x^2)^5]}-\tfrac{1}{3}\sqrt{[(1-x^2)^3]}+c$$

2. Für $x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$ ist $\frac{m+1}{n}=-\frac{1}{3}$; das Integral kann daher nicht nach der ersten Methode gefunden werden. Dagegen ist $\frac{m+1}{n}+p=-2$; folglich läßt sich die Integration nach der zweiten Methode ausführen. Um zu integriren, muß man zuerst mit $(x^3)^{-\frac{5}{3}}$ oder x^{-5} multipliciren und dividiren, wodurch entsteht:

$$x^{-7}dx(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}}.$$

Man mache nun $1+ax^{-3}=z^3$, woraus $x=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$. Folglich:

$$\int x^{-7}dx(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}}=\int -\frac{1}{a^2}(1-z^{-3})dz$$

$$=c-\frac{1}{a^2}(z+\tfrac{1}{2}z^{-2})=c-\frac{3x^3+2a}{2a^2x\sqrt[3]{[(x^3+a)^2]}}.$$

3. Für $x^3dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}$ bekommt man $\frac{3}{2}dz(z^6-a^2z^3)$, wenn $a^2+x^2=z^3$ gesetzt wird. Daraus das gesuchte Integral:

$$\tfrac{3}{56}\sqrt[3]{[(a^2+x^2)^4]}(4x^2-3a^2)+C.$$

4. Desgleichen hat man:

$$\int\frac{adx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int ax^{-3}dx(1+x^{-2})^{-\frac{3}{2}}=\frac{ax}{\sqrt{(1+x^2)}}+C.$$

§. 131. Wenn die erwähnten Bedingungen der Integrabilität nicht erfüllt werden, so sucht man das vorgelegte Integral vermittelst der theilweisen Integration auf ein einfacheres zurückzuführen. Dieser Regel zufolge haben wir, nachdem der Kürze halber $z=a+bx^n$ gesetzt und vorerst z als constant angesehen worden:

$$\int x^m dx\cdot z^p=\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}-\frac{p}{m+1}\int z^{p-1}x^{m+1}dz;$$ woraus wegen

$z=a+bx^n$ und $dz=nbx^{n-1}dx$:

$$\int x^m dx\cdot z^p=\frac{x^{m+1}z^p}{m+1}-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}dx\cdot z^{p-1}\ \ldots\ (1).$$

Es ist aber $z^p=z^{p-1}\cdot z=z^{p-1}(a+bx^n)$; folglich:

$$\int x^m dx\cdot z^p=a\int x^m dx\cdot z^{p-1}+b\int z^{p-1}x^{m+n}dx\ \ldots\ (2).$$

Durch Gleichsetzung der beiden Werthe (1) und (2) entsteht:

$$b(m+1+np)\int z^{p-1}\cdot x^{m+n}dx=x^{m+1}z^p-a(m+1)\int z^{p-1}\cdot x^m dx\ \ldots\ (3).$$

Vertauscht man $p-1$ mit p und $m+n$ mit m, so findet man:

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{x^{m-n+1} z^{p+1} - a(m-n+1)\int x^{m-n} z^p\, dx}{b(m+1+np)} \quad \ldots \text{(A)}.$$

Setzt man für das letzte Glied der Gleichung (2) seinen aus (3) genommenen Werth, so erhält man:

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{z^p\, x^{m+1} + anp\int x^m dx \cdot z^{p-1}}{m+1+np} \quad \ldots \text{(B)}.$$

§. 132. Der Gebrauch dieser Reductionsformeln ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

1. Mittelst der Formel (A) wird das Integral $\int x^m dx \cdot z^p$ auf $\int x^{m-n} z^p\, dx$ zurückgebracht; dieses letztere läßt sich dann wieder auf $\int x^{m-2n} z^p\, dx$ zurückführen u. s. w., dergestalt, daß nach i Reductionen das ursprüngliche Integral von $\int x^{m-in} z^p\, dx$ abhängt.

2. Die Formel (B) dient dazu, den Exponenten p des Binoms z nach und nach um 1, 2, 3 ... Einheiten zu vermindern.

3. Die Formeln (A) und (B) erfüllen nicht mehr ihren Zweck, wenn m und p negativ sind, weil sie dann den Exponenten von x außerhalb der Klammern und den des Binoms vergrößern. Allein durch Auflösung der Gleichungen (A) und (B) rücksichtlich der auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Integrale gelangt man zu neuen Formeln, die sich dann in dem betreffenden Falle anwenden lassen. Auf solche Art zieht man aus (A), wenn man $m-n$ mit m vertauscht:

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{x^{m+1} z^{p+1} - b(m+np+n+1)\int x^{m+n} z^p\, dx}{a(m+1)} \quad \ldots \text{(C)};$$

desgleichen aus (B), wenn man $p-1$ in p verwandelt:

$$\int x^m dx \cdot z^p = \frac{-x^{m+1} z^{p+1} + (m+np+n+1)\int x^m dx \cdot z^{p+1}}{an(p+1)} \quad \ldots \text{(D)}.$$

4. Das Gesetz der Exponenten von x in dem Resultat der Integration läßt sich demnach hier von vornherein bestimmen. So z. B. sieht man bald, daß das Integral von $\frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ von der Form $(Ax^4+Bx^2+C)\sqrt{(1-x^2)}$ ist, wo A, B, C unbestimmte Coefficienten darstellen.

Den etwas mühsamen Gebrauch unserer vorhergehenden Formeln können wir hiernach umgehen, indem wir die Differentiale solcher

Ausdrücke Glied für Glied miteinander vergleichen, wovon wir schon im §. 123 ein Beispiel gesehen haben.

Anmerkung. Die hier aufgestellten vier Reductionsformeln werden für die Fälle, in welchen die Nenner verschwinden, unbrauchbar. Es ereignet sich dies in C für $m+1=0$; in C und D für $a=0$; in A für $b=0$; in D für n oder $p+1=0$; in A und B für $m+1+np=0$. In allen diesen Fällen aber läßt sich das fragliche Integral auf Monome oder rationale Brüche zurückführen, was unsere Reductionsformeln ohnehin entbehrlich macht.

§. 133. Das Integrationsverfahren, welches wir jetzt mittheilen wollen, verdient wegen seiner Einfachheit und der mancherlei Umstände, in denen es Anwendung gestattet, einige Beachtung. Es ist:

$$d[x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}]=(n-1)x^{n-2}\sqrt{(1-x^2)}dx-\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

oder, nachdem das erste Glied des zweiten Theils mit $\sqrt{(1-x^2)}$ multiplicirt und dividirt worden:

$$d[x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}]=\frac{(n-1)x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{nx^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Hieraus folgt, wenn man integrirt und transformirt:

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^{n-1}\sqrt{(1-x^2)}}{n}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\;\ldots\;(E).$$

Macht man die nämliche Rechnung mit $x^{n-1}\sqrt{(x^2\pm1)}$, so findet man:

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(x^2\pm1)}}=\frac{x^{n-1}\sqrt{(x^2\pm1)}}{n}\mp\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(x^2\pm1)}}\;\ldots\;(F).$$

Mittelst dieser Formeln ist es möglich, jede mit der Wurzelgröße $\sqrt{(A+Bx+Cx^2)}$ behaftete Funktion zu integriren, weil sie sich auf die Form $\frac{z^n dz}{\sqrt{(a^2\pm z^2)}}$ oder $\frac{z^n\,dz}{\sqrt{(z^2\pm a^2)}}$ bringen läßt. Indem man oben und unten mit a dividirt, kann man dann die Wurzelgröße in $\sqrt{(1\pm x^2)}$ oder $\sqrt{(x^2\pm1)}$ verwandeln. Die Formeln (E) und (F) machen demnach zuletzt das ursprüngliche Integral von

$\int\frac{xdx}{\sqrt{(x^2\pm1)}}$ oder von $\int\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, wenn n ungerade, oder von

$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2\pm1)}}$ oder von $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, wenn n gerade ist, abhängig.

Die beiden ersten Integrale gehören der 4ten Fundamentalregel an; das dritte ist im §. 125 angegeben worden; das vierte kommt dem Bogen zu, dessen Sinus $=x$ ist.

Die Formeln (E) und (F) sind nicht mehr brauchbar, wenn n negativ ist. Durch Umkehrung derselben gelangt man jedoch zu neuen, für den fraglichen Fall passenden Relationen, welche auch durch eine der obigen ähnliche Behandlung des Ausdruckes $x^{-n+1}\sqrt{(1-x^2)}$ unmittelbar abgeleitet werden können. Uebrigens ist:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}=c-l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right).$$

Anmerkung. Das letzte Integral läßt sich direkt auf folgende Art finden. Man setze $\sqrt{(1-x^2)}=z$; alsdann wird:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}=-\int\frac{dz}{1-z^2}=-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+C;$$

oder, wenn man für z den Werth $\sqrt{(1-x^2)}$ wieder herstellt:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{1-\sqrt{(1-x^2)}}\right)+c=-l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right)+C.$$

§. 134. Mit Hülfe der vorhergehenden Reductionsformeln erhalten wir folgende Resultate:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x}{2}\cdot\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{2}\text{arc}\,(\sin=x)+c,$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{x^2+2}{3}\cdot\sqrt{(1+x^2)}+c,$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=-\frac{2x^2+3}{8}\cdot x\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{3}{8}\text{arc}\,(\sin=x)+c,$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\left(\frac{3x^4+4x^2+8}{15}\right)\sqrt{(1-x^2)}+c.\ \text{Ferner:}$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}+c,$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2x^2}-\tfrac{1}{2}l\,\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}+c,$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4x^5}\right)\sqrt{(1-x^2)}+c,$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3\cdot x^4}\right)\sqrt{(1-x^2)}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}l\,\frac{\sqrt{(1+\sqrt{1-x^2})^3}}{x}+c.$$

§. 135. Um das Integral von $\frac{x^m dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ zu finden, hat man

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = x^{m-\frac{1}{2}} dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man daher in der Reduktionsformel $m-\frac{1}{2}$ für m, 1 für n, $-\frac{1}{2}$ für p, ferner $2a$ statt a und -1 statt b; so erhält man:

$$\frac{\sqrt{}x^m dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{(2ax-x^2)}}{m} + \frac{(2m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

eine Reductionsformel, welche auch direkt durch ein mit dem im §. 133 analoges Verfahren gewonnen werden kann.

Integration einiger Exponentialfunktionen.

§. 136. Die Exponentialfunktionen bieten zwei besondere Fälle dar, in welchen man sie sofort integriren kann.

1. In der Differentialfunktion $za^x dx$, wo z eine algebraische Funktion V von a^x ist, mache man $a^x = u$: man erhält dann die in Bezug auf u algebraische Funktion $\frac{Vdu}{ula}$. So wird z. B.:

$$\int\frac{a^x dx}{\sqrt{(1+a^{nx})}} = \frac{1}{la}\cdot\int\frac{du}{\sqrt{(1+u^n)}}.$$

2. Durch Differentiation von ze^x, wo z eine algebraische Funktion von x ist, entsteht $e^x dx(z+z')$. Jede Exponentialfunktion, für welche der Faktor von $e^x dx$ aus zwei Theilen besteht, deren eine die Derivirte des andern ist, wäre demnach leicht zu integriren.

Beispiele: I. Man findet:

$$\int e^x dx(3x^2+x^3-1) = (x^3-1)e^x.$$

II. In $\frac{e^x xdx}{(1+x)^2}$ mache man $1+x=z$; man erhält dann:

$$\int\frac{e^x xdx}{(1+x)^2} = \frac{e^z}{e}\left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{z^2}\right) = \frac{e^z}{ez} = \frac{e^x}{1+x} + c.$$

§. 137. In den übrigen Fällen muß man jedoch seine Zuflucht zu der theilweisen Integration nehmen. Auf diese Art bekommt man für $x^n dxa^x$, wenn zunächst x^n als constant betrachtet wird:

$$\int x^n dxa^x = \frac{a^x\cdot x^n}{la} - \frac{n}{la}\int a^x x^{n-1}dx.$$

Indem man auf gleiche Weise mit $a^x x^{n-1}dx$ u. s. w. verfährt, gelangt man für ein positives ganzes n zu;

$$\int a^x x^n dx = a^x \left(\frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{l^2a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{l^3a} + \ldots \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{l^{n+1}a} \right) + c.$$

Dieselbe Rechnung gilt auch für $za^x dx$, wenn z eine algebraische, ganze Funktion von x ist.

§. 138. Man sieht bei einiger Ueberlegung bald ein, daß, wenn n negativ ist, man dagegen den Exponenten von x successive vermehren muß. Man erhält hiernach, wenn a^x vorerst als constant angenommen wird, zunächst:

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}};$$

ferner nach fortgesetzter Wiederholung desselben Verfahrens:

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = \frac{-a^x}{n-1} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{la}{(n-2)x^{n-2}} + \frac{l^2a}{(n-2)(n-3)x^{n-3}} \cdots + \frac{l^{n-2}a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)x} \right) + \frac{l^{n-1}a}{2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \int \frac{a^x dx}{x}.$$

Es läßt sich keine weitere Reduction anbringen, weil unsere Formel für $n=1$ nichts gibt. Die Analysten haben sich längere Zeit mit der Aufsuchung des Integrals $\int \frac{a^x}{x} dx$ beschäftigt und sich genöthigt gesehen, dasselbe als eine transcendente Größe eigener Art aufzustellen, das weder durch Kreisbogen noch Logarithmen ausgedrückt werden kann.

Das Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$ läßt sich mit Hülfe der Relation

$$\frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + la + \frac{l^2a}{2}x + \frac{l^3a}{2 \cdot 3}x^2 + \ldots$$

sofort durch folgende ins Unendliche fortlaufende Reihe darstellen:

$$\int \frac{a^x}{x} dx = lx + x \cdot la + \frac{x^2 l^2 a}{2 \cdot 2} + \frac{x^3 \cdot l^3 a}{3 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ꝛc.}$$

Anmerkung. Es bleibt hier nichts anders zu thun übrig, als Methoden aufzusuchen, um den Werth von $\int \frac{a^x dx}{x}$ auf die leichteste Art durch Annäherung anzugeben. Die Resultate der Rechnung könnten für den Gebrauch in Tabellen

zusammengestellt werden, wie dies mit den Logarithmen und Kreisfunktionen bereits geschehen ist. Ein Integral, dessen Bestimmung von $\int\frac{a^x\,dx}{x}$ abhängig gemacht worden ist, darf daher als gefunden angesehen werden.

§. 139. Ist n eine gebrochene Zahl, so sind die beiden obigen Entwicklungen unbegrenzt.

Hat man z. B. $n=-\frac{1}{2}$, so liefert die eine die Reihe:

$$\int\frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{la\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2x\,la}+\frac{1\cdot3}{4x^2\,l^2a}+\ldots\right)+c;$$

die zweite aber die Reihe:

$$\int\frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{\sqrt{x}}\left(2x-\frac{4x^2la}{1\cdot3}+\frac{8x^3l^2a}{1\cdot3\cdot5}+\ldots\right)+c.$$

Aehnliches gilt für $za^x\,dx$, worin z eine beliebige algebraische Funktion von x ist.

Integration einiger logarithmischen Funktionen.

§. 140. Es sei das Differential $zdxl^n x$, wo z eine algebraische Funktion von x bedeutet, zu integriren.

Wenn n eine ganze positive Zahl ist, so läßt sich vermittelst der Integration durch Theile das gegebene Differential insofern vereinfachen, als der Exponent von lx kleiner wird. Man erhält nämlich, wenn man zunächst $l^n x$ als constant ansieht:

$$\int z\,dxl^n x=l^n x\int zdx-n\int\left(l^{n-1}x\cdot\frac{dx}{x}\int z\,dx\right),$$

in welchem Resultate der Exponent von lx um eine Einheit vermindert worden. Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens wird man zuletzt das gesuchte Integral auf die Integration einer algebraischen Funktion bringen.

Für das Differential $x^m l^n xdx$ gibt die Formel:

$$\int x^m l^n xdx=\frac{x^{m+1}}{m+1}l^n x-\frac{n}{m+1}\int l^{n-1}x\cdot x^m\,dx.$$

Durch Verwandlung von n in n—1 findet man:

$$\int x^m\,dxl^{n-1}x=\frac{x^{m+1}}{m+1}l^{n-1}x-\frac{n-1}{m+1}\int l^{n-2}x\cdot x^m dx.$$

Setzt man diese Reduktionen fort, so entsteht folgende allgemeine Formel:

$$\int x^m l^n x dx = x^{m+1}\left(\frac{l^n x}{m+1} - \frac{n l^{n-1} x}{(m+1)^2} + \frac{n(n-1) l^{n-2} x}{(m+1)^3} \ldots\right) + c.$$

§. 141. Wenn der Exponent n eine negative Zahl ist, so muß man das Verfahren dahin abändern, daß der Exponent größer wird, was dadurch zu Stande kommt, daß man bei der theilweisen Integration von $\int z dx l^n x$ vorerst z als constant betrachtet. Wegen $\int \frac{dx l^n x}{x} = \frac{l^{n+1} x}{n+1}$ schreibt man das gegebene Differential wie folgt: $zx \cdot \frac{dx}{x} \cdot l^n x$; woraus dann entspringt:

$$\int \frac{z dx}{l^n x} = \frac{zx}{-n+1} l^{-n+1} x + \frac{1}{n-1} \int [l^{-n+1} x d(zx)],$$

ein Resultat, welches dem beabsichtigten Zwecke entspricht.

Um die Natur der hier vorkommenden Schwierigkeit besser einzusehen, möge unsere Formel ihre Anwendung auf das Differential $\frac{x^m dx}{l^n x}$ finden; sie gibt dann:

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = -\frac{x^{m+1}}{n-1}\left(\frac{1}{l^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-2} \cdot \frac{1}{l^{n-2} x} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)} \frac{1}{l^{n-3} x} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} \int \frac{x^m dx}{lx}.$$

Wir sind hier genöthigt, stehen zu bleiben, weil für $n=1$ unsere Formel unbrauchbar wird. Das Integral läßt sich aber auf eine andere Form bringen, wenn wir $x^{m+1} = z$ setzen; wir erhalten alsdann:

$$\int \frac{x^m dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz} = \int \frac{e^u du}{u},$$

wo $lz = u$ gemacht worden: es käme hiernach das im §. 138 aufgeführte transcendente Integral wieder zum Vorschein, das nur durch eine unendliche Reihe dargestellt werden kann.

Anmerkung. Die Reihe:

$$\int \frac{e^u du}{u} = c + lu + u \frac{u^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \text{rc.}$$

convergirt für jeden Werth von u. Ist u negativ, so wird lu imaginär; daraus folgt jedoch nicht, daß $\int \frac{e^u du}{u}$ keinen

reellen Werth zuläßt. Denn es ist lu durch Integration von $\frac{du}{u}$ entstanden, wofür man $\frac{d(-u)}{-u}$ schreiben kann, was $l(-u)$ als Integral gibt. Setzt man in der letzten Formel lu statt u, so kommt:

$$\int \frac{du}{lu} = c + l\,lu + lu + \frac{l^2u}{1\cdot2\cdot2} + \frac{l^3u}{1\cdot2\cdot3\cdot3} + \text{etc.}.$$

wo man, wenn $u<1$ ist, $l(-lu)$ statt $l\,lu$ zu nehmen hat.

§. 142. Ist n eine positive oder negative gebrochene Zahl, so kann man beide Reductionsformeln ohne Ende fort anwenden, so daß man jedesmal eine unendliche Reihe bekommt. Die erste Formel z. B. auf $\frac{x^m dx}{\sqrt{lx}}$ angewandt, gibt auf diese Art:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{lx}} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\frac{1}{(lx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(lx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot3}{4(m+1)^2(lx)^{\frac{5}{2}}} + \ldots\right) + c.$$

Integration trigonometrischer Funktionen.

§. 143. Enthält eine Differentialformel Kreisbogen, so läßt sich jederzeit, weil die Differentiale des Bogens algebraische Funktionen sind, das Integral vermittelst der theilweisen Integration auf das einer algebraischen Formel zurückführen, insofern man dabei dergleichen Bogen vorerst als constant betrachtet. So hat man, wenn z eine algebraische Funktion ist:

$$\int z dx \cdot \text{arc}(\sin = x) = \text{arc}(\sin = x)\int z dx - \int \frac{dx \cdot \int z dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{; desgleichen:}$$

$$\int z dx \cdot \text{arc}(\text{tg} = x) = \text{arc}(\text{tg} = x)\int z dx - \int \frac{dx \int z dx}{1+x^2}.$$

Beispiele:

1. $\int x dx\, \text{arc}(\sin = x) = \frac{1}{2}x^2 \text{arc}(\sin = x) + \frac{1}{4}x\sqrt{(1-x^2)} - \frac{1}{4}\text{arc}(\sin = x) + c.$

2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\, \text{arc}(\sin = x) = x - \sqrt{(1-x^2)} \cdot \text{arc}(\sin = x) + c.$

§. 144. Kommen dagegen trigonometrische Linien in den Differentialfunktionen vor, so gibt es verschiedene Methoden, dieselben zu integriren. Die vorzüglichsten dieser Methoden, die bald mehr bald weniger vortheilhaft sind, wollen wir hier in Kürze angeben.

Erste Methode. Man kann solche Funktionen stets in binomische Differentiale verwandeln. Denn macht man $\sin x = z$ in $\sin^m x \cos^n x dx$, so entsteht:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int z^m dz \sqrt{[(1-z^2)^{n-1}]}.$$

Das letzte Integral ergibt sich sofort, wenn n ungerade ist, was auch m sein mag.

Die erste Bedingung der Integrabilität (§. 128) wird erfüllt, wenn sich m als eine ungerade Zahl herausstellt, weil dann $\frac{1}{2}(m+1)$ eine ganze Zahl ist.

Der zweiten Bedingung der Integrabilität (§. 129) geschieht Genüge, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade Zahlen sind, weil $\frac{1}{2}(m+n)$ alsdann eine ganze Zahl ist.

In den übrigen Fällen wird das gesuchte Integral auf dasjenige des einfachsten analogen Differentials zurückgeführt.

Beispiele: 1. $\sin^4 x \cos^3 x dx = \int z^4 dz (1-z^2) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c.$

2. $\sin^3 x dx = \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\frac{1}{3}\cos x(3-\cos^2 x) + c$

3. $\sin^4 x dx = \int \frac{z^4 dz}{(\sqrt{1-z^2})} = -\frac{\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin x}{4}\cos x + \frac{1\cdot 3\cdot x}{2\cdot 4} + c.$

4. $\cos^4 x dx = \frac{1}{3}\sin x \cos^2 x + \frac{2}{3}\sin x + c.$

§. 145. **Zweite Methode.** Aus den Integralformeln:

$$\int dx \cos kx = \frac{1}{k}\sin kx + c, \int dx \sin kx = -\frac{1}{k}\cos kx + c$$

fließt zunächst dasjenige aller rationalen und ganzen Funktionen von Sinus und Cosinus, weil man die Potenzen dieser trigonometrischen Linien in Sinus und Cosinus vielfacher Bogen (höhere Algebra §. 185) ausdrücken kann.

Beispiele: 1. $\int \cos^5 x dx = \int (\frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x) dx$

$$= \frac{1}{80}\sin 5x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x + c.$$

2. $\int \sin^3 x dx = \int (\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x) dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + c.$

Diese Methode wird vorzugsweise bei den numerischen Auflösungen gebraucht, wenn die Sinus und Cosinus vielfacher Bogen statt der Potenzen jener Linien gewählt werden.

§. 146. **Dritte Methode.** Die im §. 181 der höhern Algebra aufgeführten Formeln:

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

vermittelst welcher sich die trigonometrischen Funktionen in Exponentialgrößen verwandeln lassen, bringen die Integration der erstern auf diejenige der letztern zurück.

Beispiele: 1. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$,

2. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$.

§. 147. Eine **vierte Methode** liefert uns die theilweise Integration. Bringt man nämlich das Differential $\sin^m x \cos^n x \cdot dx$ auf die Form $dx \sin x \cdot \cos^n x \times \sin^{m-1} x$, so findet man, weil $- dx \sin x$ das Differential von $\cos x$ ist:

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x}{n+1} \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}$$

$$\int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x \cdot dx \quad \text{(G)}.$$

Hieraus entsteht, wenn man erwägt, daß $\cos^{n+2} x = \cos^n x (1 - \sin^2 x)$ ist, und versetzt:

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}$$

$$\int dx \sin^{m-2} x \cos^n x \ldots \text{(I)}.$$

Indem wir auf dieselbe Weise mit $\cos x$ verfahren, wie so eben mit $\sin x$, erhalten wir die Formeln:

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx \ldots \text{(H)};$$

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx \sin^m x \cos^{n-2} x \ldots \text{(K)}.$$

Durch Umkehrung der Formel (K) entspringt:

$$\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1} \int \sin^m x \cos^n x\, dx,$$

woraus, wenn $n+2$ für n gesetzt wird,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}$$

$$\int \sin^m x \cos^{n+2} x dx \ldots \text{(L)}.$$

Ebenso entsteht aus der Formel (I) durch Umkehrung und Substitution von m+2 für m:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}$$
$$\int \sin^{m+2} x \cos^n x dx \ldots (M).$$

§. 148. Macht man n oder m Null in den Formeln (I) und (K), so hat man:

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} \int dx \sin^{m-2} x;$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int dx \cos^{n-2} x.$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel (I) kann man das Integral $\int dx \sin^m x \cos^n x$ auf $\int \cos^n x dx$ oder auf $\int \sin x \cos^n x dx$ zurückführen; in beiden Fällen wäre mithin das ursprüngliche Integral als gefunden zu betrachten. Man kann auch mit Hülfe der Formel (K) das Integral $\int dx \sin^m x \cos^n x$ auf $\int \sin^m x dx$ oder auf $\int \cos x \sin^m x dx$ zurückbringen, welche beide letztern Integrale als bekannt anzusehen sind.

Beispiele: 1. $\int dx \sin^3 x \cos^2 x = -\frac{1}{5} \sin^2 x \cos^3 x + \frac{2}{5} \int dx \sin x \cos^2 x,$

$$\int dx \sin x \cos^2 x = \frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{1}{3} \int dx \sin x;$$

folglich, weil $\int dx \sin x = -\cos x + c,$

$$\int dx \sin^3 x \cos^2 x = \cos x \left(-\frac{1}{5} \sin^2 x \cos^2 x + \frac{2}{15} \sin^2 x - \frac{2}{15}\right) + c.$$

2. $\int dx \sin^2 x \cos^3 x = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + c.$

§. 149. Macht man in den Formeln (M) und (L) m negativ und n Null, oder n negativ und m Null, so bekommt man:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x};$$
$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Für m positiv und n negativ wird das Integral $\int \frac{\sin^m x dx}{\cos^n x}$ mit Hülfe der Reductionsformel (I) auf $\int \frac{dx \sin x}{\cos^n x}$ oder auf $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ zurückgeführt, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Das erste dieser beiden letzten Integrale ist $= \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x}$, während das andere

mittelst der zweiten der oben stehenden Reductionsformeln als völlig bekannt oder von $\int\frac{dx}{\cos x}$ abhängig zu betrachten ist. In demselben Falle bringt die Reductionsformel (M) das Integral $\int\frac{\sin^m x dx}{\cos^n x}$ auf $\int dx \sin^m x$ oder auf $\int\frac{dx \sin^m x}{\cos x}$ zurück, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Das erste dieser Integrale ist als gefunden anzusehen, während das zweite mittelst (I) von $\int\frac{dx}{\cos x}$ oder von $\int\frac{dx \sin x}{\cos x}$ abhängig gemacht wird.

Für m negativ und n positiv liefern die Formeln (K) und (L) in Bezug auf das Integral $\int\frac{\cos^n x dx}{\sin^m x}$ analoge Resultate.

Die Funktionen $\frac{\cos^n x dx}{\sin^m x}$ und $\frac{\sin^m x dx}{\cos^n x}$ lassen sich übrigens auch wie folgt integriren.

Die erste z. B. ist, wenn n eine gerade Zahl $2h$ macht, mit $\frac{(1-\sin^2 x)^h}{\sin^m x} dx$ gleichgeltend. Die Entwicklung von $(1-\sin^2 x)^h$ liefert eine Reihe von Gliedern von der Form $\sin^h x dx$. Im Fall daß $n=2h+1$ ist, hat man:

$$\frac{\cos^{2h} x \cos x dx}{\sin^m x} = \frac{(1-z^2)^h dz}{z^m},$$

wenn $\sin x = z$ gesetzt wird.

Anmerkung. Die Formel (I) ist unbrauchbar für $\int\frac{dx \sin^m x}{\cos^n x}$, wenn $m=n$ ist. Wir wollen daher diesen Fall besonders betrachten, d. h. $\int \tang^m x dx$ aufsuchen. Durch Umkehrung der Formel (H) kommt:

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{m+1}{n-1} \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Hieraus folgt, wenn man jetzt $m-2$ statt m, und $-m+2$ statt n setzt: $\int \mathrm{tang}^m x dx = \frac{1}{m-1} \mathrm{tang}^{m-1} x - \int \mathrm{tang}^{m-2} x dx,$

wonach das Integral $\int \tan g^m x dx$ als bekannt oder als auf $\int \tan g x dx$ reducirt angesehen werden kann.

Eine ähnliche Formel liefert uns die Relation (G) für $\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx$.

§. 150. Sehr leicht lassen sich Ausdrücke von der Form $\int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x}$ auf einfachere zurückführen. Multiplicirt man nämlich den Zähler mit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cdot \cos^n x} + \int \frac{dx}{\sin^m x \cdot \cos^{n-2} x}.$$

Diese Formel wendet man so lange an, bis im Nenner nur die erste Potenz von $\sin x$ und $\cos x$ zurück bleibt.

Für die Formel $\int \frac{dx}{\cos^n x \sin^n x}$ bekommt man, wenn man erwägt, daß $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ und $2x = z$ gesetzt wird, $2^{n-1} \int \frac{dz}{\sin^n z}$, welcher Ausdruck nach den gegebenen Vorschriften aufzulösen ist.

§. 151. Folgende fünf trigonometrische Integrale sind höchst einfach, und deshalb merkwürdig, weil man auf dieselben bei den andern zu integrirenden Funktionen dieser Gattung durch unsere vorhergehenden Formeln zurückgeführt wird.

1. Für $\frac{dx}{\sin x}$ erhält man, wenn $\cos x = z$ gesetzt wird,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l c + \frac{1}{2} l \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = l c \tan g \tfrac{1}{2} x, \text{ weil } \tan g^2 \tfrac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

2. Eine ähnliche Rechnung gibt, wenn man $\sin x = z$ macht:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = l c \frac{\sqrt{(1 + \sin x)}}{\sqrt{(1 - \sin x)}} = l c \tan g (45^0 + \tfrac{1}{2} x).$$

3. Für $\frac{dx \cos x}{\sin x}$ hat man $\int \frac{dx \cos x}{\sin x} = \int \frac{dx}{\tan g x} = \int dx \cot x = l(c \sin x)$.

4. Desgleichen $\int \frac{dx \sin x}{\cos x} = \int dx \tan g x = \int \frac{dx}{\cot x} = l \frac{c}{\cos x}$.

5. Durch Addition der beiden letztern Formeln entsteht:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \frac{c \sin x}{\cos x} = l(c \tan g x).$$

Die Formel $dx \sin^m x \cos^n x$ wird sich also jedesmal integriren lassen, so lange m und n ganze positive oder negative Zahlen sind. Wenn m und n gebrochene Zahlen bedeuten, wird man jedoch seine Zuflucht zu den Reihen nehmen müssen, einige Fälle abgerechnet, wo sich die Integration von selbst darbietet.

Beispiele: 1. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + l\, tg\, x + c.$

2. $\int \frac{dx \sin^3 x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \sin^2 x + l \sec x.$

Bestimmung der Constanten bei den gefundenen Integralen. Integration durch Reihen. Integration der höhern Differentiale.

§. 152. Es sei P das Integral einer Differentialfunktion zdx von x, oder $dP = zdx$, ferner c die willkührliche Constante, welche man hinzuzufügen hat, um dem Integral die Allgemeinheit zu ertheilen, die es zuläßt, mithin $\int zdx = P + c$. So lange sich's hier um eine bloße Rechnung handelt, bleibt diese Constante willkürlich; sie hört es aber auf zu sein, wenn sie, bei der Anwendung des Integrals auf ein bestimmtes Problem, gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügen soll. Will man z. B. den zwischen den Ordinaten BC, PM (Fig. 1) enthaltenen Flächenraum $BCPM = t$, welche Ordinaten den Abscissen a und b entsprechen, suchen; so hat man, weil $dt = ydx$, durch Integration $t = \int ydx = P + c$. Nimmt nun die Fläche $t = P + c$ für $x = a = AC$ ihren Anfang, so verschwindet t für $x = a$; es ist demnach $A + c = 0$, oder $c = -A$, wo A den Werth darstellt, welchen die durch Integration gefundene Funktion P für $x = a$ erhält; folglich $t = P - A$.

Es ist jetzt nichts weiter nöthig als $x = b$ zu machen, um den zwischen den gegebenen Grenzen eingeschlossenen Flächeninhalt zu bekommen; man hat dann, wenn B den Werth bezeichnet, welchen P für $x = a$ annimmt, das gesuchte Integral $t = B - A$. Ueberhaupt wird man zur Bestimmung der willkührlichen Constanten c aus der Natur des in Frage stehenden Gegenstandes den Werth k, welchen das Integral $t = P + c$ für $x = a$ erhält, zu ermitteln suchen, was die Bedingungsgleichung $c = k - A$ liefert; es ist demnach, wenn dieser Werth in das allgemeine Integral substituirt wird, $t = P + k - A$.

Bezeichnet dann noch g den Werth des Integrals für $x=b$, so hat man daraus $g-k=B-A$, woraus hervorgeht, daß es nicht absolut nothwendig, den Ursprung des Integrals zu kennen.

Jedes Integral, dessen Anfang oder Grenzen unbestimmt gelassen werden, wird ein **unbestimmtes Integral** genannt, und muß, um vollständig zu sein, eine willkührliche Constante enthalten; dagegen heißt das Integral ein **bestimmtes Integral**, wenn seine Grenzen gegeben sind. Wie die Gleichung $t=B-A$ zeigt, findet man das zwischen den gegebenen Grenzen $x=a$ und $x=b$ zu entwickelnde Integral, ohne gerade nöthig zu haben die willkührliche Constante zu bestimmen, auch dadurch, daß man in dem allgemeinen Integral $t=P+c$ zuerst $x=a$, dann $x=b$ setzt und das erstere Resultat vom zweiten subtrahirt.

Um anzudeuten, daß das Integral $\int z dx$ innerhalb der Grenzen von $x=a$ bis $x=b$ genommen werden soll, wählte **Fourier** die Bezeichnung $\int_a^b z dx$. So z. B. ist $\int_{2\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 1$, weil das Integral $-\cos x$ sich an den beiden Grenzen in -1 und 0 verwandelt. Der Ausdruck $\int_a^x$ zeigt an, daß das Integral bei $x=a$ anfängt und sich bis zu einem unbestimmten Werth der Veränderlichen x erstreckt.

§. 153. Wenn man eine vorgelegte Funktion nicht genau integriren kann, so muß man sich mit einem genäherten Werthe des Integrals begnügen. Um zu diesem genäherten Werthe von $\int z dx$ zu gelangen, entwickelt man z in eine Reihe nach steigenden oder fallenden Potenzen von x, multiplicirt dann jedes Glied mit dx und integrirt.

Beispiele: 1. Zur Bestimmung des Integrals $\int \frac{dx}{1+x^2}$ hat

$$\text{man } (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots;$$

folglich, weil andrerseits $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}(\tan g = x)$ ist,

$$\operatorname{arc}(\tan g = x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

2. Um $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \operatorname{arc}(\sin = x)$ durch eine Reihe auszudrücken, hat man:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3x^4}{2\cdot 4} + ꝛc;$$

folglich:

$$\text{arc}(\sin = x) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \text{ꝛc.}$$

Es ist keine Constante hinzugefügt worden, weil der Bogen, um den es sich hier handelt, als der kleinste von denjenigen, welche dem Sinus oder der Tangente x entsprechen, zugleich mit dem Sinus oder der Tangente verschwindet. Die erste dieser Formeln wurde in der höhern Algebra zur Aufsuchung des Verhältnisses π des Umfanges zum Durchmesser benutzt; die zweite kann ebenfalls dazu dienen, wenn man erwägt, daß das Drittel eines Quadranten $\frac{1}{2}$ zum Sinus hat: hieraus entsteht, wenn $x = \frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7} \ldots$$

§. 154. Die Entwicklung der Integrale in Reihen führt nur insofern zu brauchbaren Resultaten, als die gefundenen Reihen convergirend sind, was nicht immer der Fall ist. Es sind deshalb verschiedene Mittel erdacht worden, um zu dergleichen genäherten Werthen der Integrale zu gelangen, welches auch die gegebenen Differentiale sein mögen. Eine solche Reihe ist die Bernoullische Reihe, welche nach ihrem Erfinder Johann Bernoulli genannt wird. Setzen wir nämlich in der Taylor'schen Formel $h = -x$, und bezeichnen wir durch b den Werth von $f(x-x)$ oder von $f0$; so haben wir:

$$b = y - y'x + \tfrac{1}{2}y''x^2 - \ldots$$

Substituiren wir in diese Gleichung statt y', y'' ... ihre Werthe z, z' ... und bestimmen daraus denjenigen von $y = \int z dx$; so erhalten wir:

$$y = \int z dx = b + zx - \tfrac{1}{2}z'x^2 + \tfrac{1}{6}z''x^3 + \text{ꝛc.}$$

wo b die willkührliche Constante darstellt.

Die Grenzen der Summe der außer Acht gelassenen Glieder lassen sich nach dem im §. 48 Gesagten bestimmen.

Beispiel. Für $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$ erhält man:

$$b = la,\; z = \frac{1}{a+x},\; z' = -\frac{1}{(a+x)^2},\; z'' = \frac{2}{(a+x)^3} \ldots,$$ folglich:

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} \ldots$$

Anmerkung. Die Methode der theilweisen Integration führt ebenfalls zu der Bernoullischen Reihe. Denn dieser Regel zufolge ist:

$\int z dx = zx - \int x dz$; ferner $\int x dz = \int z' x dx = \frac{1}{2} x^2 z' - \frac{1}{2} \int x^2 z'' dx$;

desgleichen $\int x^2 z'' dx = \frac{1}{3} \int x^3 z'' - \frac{1}{3} \int x^3 z''' dx$ u. s. w.

Diese Werthe nach und nach substituirt, geben:

$$\int z dx = zx - \frac{z' \cdot x^2}{1 \cdot 2} + \frac{z'' \cdot x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + C,$$

welche Entwicklung mit der vorhergehenden gleichlautend ist.

§. 155. Da die Differentialcoefficienten z', z'' ... öfters eine unbequeme Gestalt annehmen, so hat Taylor zur bequemern Handhabung dieser Methode eine andere Reihe aufgestellt, in welcher statt z', z'' ... die Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dw}$, $\frac{d^2z}{dw^2}$ ... vorkommen, wobei w selbst wieder eine Funktion von x bedeutet. Es ist nämlich, wie zuvor,

$$\int z dx = zx - \int x \frac{dz}{dw} dw:$$

desgleichen, wenn der Kürze wegen

$dp = x dw$, $q = p dw$, $r = q dw$ gesetzt wird,

$$\int x \frac{dz}{dw} dw = \frac{dz}{dw} p - \int p \frac{d^2z}{dw^2} dw,$$

$$\int p \frac{d^2z}{dw^2} dw = \frac{d^2z}{dw^2} q - \int q \frac{d^3z}{dw^2} dw \text{ u. s. w.}$$

Auf solche Weise entsteht die Reihe:

$$\int z dx = zx - p \frac{dz}{dw} + q \frac{d^2z}{dw^2} - r \frac{d^3z}{dw^3} + \text{ꝛc.},$$

wo die Funktion w dergestalt zu wählen ist, daß die Größen $\frac{dz}{dw}$, $\frac{d^2z}{dw^2}$ ... möglichst einfach ausfallen.

Beispiel. Es sei $\int \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx$ zu suchen. Man hat $dz = -\frac{x dx}{z}$. Setzt man daher $dw = x dx$, so bekommt man:

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{1}{z}, \quad \frac{d^2z}{dw^2} = -\frac{1}{z^3}, \quad \frac{d^3z}{dw^3} = -\frac{3}{z^5}, \quad \frac{d^4z}{dw^4} = \frac{3.5}{z^7} \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist:

$$p = \frac{1}{3}x^3,\ q = \frac{1}{3\cdot5}\ x^5,\ r = \frac{1}{3\cdot5\cdot7}\ x^7 \text{ u. s. w.}$$

Hiernach ergibt sich für das gesuchte Integral:

$$\int dx \sqrt{(a^2-x^2)} = zx + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{z} - \frac{1\cdot1}{3\cdot5}\,\frac{x^5}{z^3} + \text{ic.}$$

§. 156. Die Taylor'sche Formel gibt:

$$f(x+h) - fx = zh + \tfrac{1}{2}z'h^2 + \tfrac{1}{6}z''h^3 \ldots,$$ woraus:

$$f(x+b-a) - fx = z(b-a) + \tfrac{1}{2}z'(b-a)^2 + \ldots,$$

wenn $h = b - a$ gesetzt wird. Macht man hierauf $x = a$ und nimmt an, daß dadurch aus $z,\ z',\ z'' \ldots$ die Größen $A,\ A',\ A'' \ldots$ hervorgehen; so findet man das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Integral:

$$fb - fa = A(b-a) + \tfrac{1}{2}A'(b-a)^2 + \ldots$$

Damit diese Reihe angewendet werden könne, muß aber die Taylor'sche Reihe zuläßig bleiben; man wird daher den Gang der Funktion z und ihrer Derivirten von $x = a$ bis $x = b$ prüfen müssen, ob sie für gewisse dazwischen liegende Werthe der Veränderlichen x nicht unendlich werden. Auch läßt sich unsere Reihe so convergirend machen, als man nur immer will. Man theile zu diesem Behufe den Zwischenraum $b - a$ in n Theile, deren jeder $= i$ ist, und berechne dann die verschiedenen Werthe des Integrals, die sich auf jeden der kleinen Zwischenräume insbesondere beziehen. Man mache daher nach und nach:

$x = a$, wodurch $z,\ z',\ z'', \ldots$ in $A,\ A',\ A'', \ldots$ übergehen,
$x = a + i$, ... $A_1,\ A_1',\ A_1'', \ldots$
$x = a + 2i$, ... $A_2,\ A_2',\ A_2'', \ldots$ u. s. w.

Hieraus entspringt:

$$f(a+i) - fa = Ai + \tfrac{1}{2}A'i^2 + \tfrac{1}{6}A''i^3 + \text{ic.},$$
$$f(a+2i) - f(a+i) = A_1 i + \tfrac{1}{2}A_1'i^2 + \tfrac{1}{6}A_1''i^3 + \text{ic.},$$
$$f(a+3i) - f(a+2i) = A_2 i + \tfrac{1}{2}A_2'i^2 + \tfrac{1}{6}A_2''i^3 + \text{ic.},$$
$$f(a+ni) - f[a+(n-1)i] = A_{n-1}i + \tfrac{1}{2}A'_{n-1}i^2 + \tfrac{1}{6}A''_{n-1}i^3 + \ldots$$

Die Summe dieser Reihen macht den vollständigen Werth von $\int_a^b z dx$, wonach:

$$f(a+ni) - fa = fb - fa = (A + A_1 + A_2 + A)_{n-1}i + \tfrac{1}{2}$$
$$(A' + A'_1 + A'_2 \ldots + A'_{n-1})i^2 + \text{ic.} \quad (1).$$

§. 157. Je kleiner i wird, desto mehr convergirt die vorstehende Reihe. Nimmt man i hinlänglich klein an, dergestalt, daß man sich mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen kann, so wird annähernd:

$$\int zdx = Ai + A_1 i + A_2 i + \;.\;.\;.\; A_{n-1} i.$$

Hieraus sieht man, warum das Integral innerhalb dieser Grenzen als die Summe von unendlich vielen Elementen betrachtet werden kann, indem die Produkte Ai, $A_1 i$, $A_2 i$ . . . nichts anders als die dem $x=a$, $a+i$, . . . entsprechenden Werthe von zdx sind, wo i die Stelle von dx vertritt.

§. 158. Anstatt, wie zur Entwicklung der Formel (1) geschah, von $x=a$ bis $x=b$ vorzuschreiten, kann man auch rückwärts von $x=b$ nach $x=a$ gehen. Man hat nämlich:

$$f(x-h) = fx - zh + \frac{z'h^2}{1.2} + \text{ꝛc.}, \text{ oder}$$

$$fx - f(x-h) = zh - \frac{z'h^2}{1\cdot 2} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man hierin $x=b$, ferner $h=b-a$, und bezeichnet die dadurch erhaltenen Werthe von z und dessen Derivirten beziehungsweise durch B, B', B'', . . . so findet man:

$$fb - fa = \int_a^b zdx = B(b-a) - \frac{B'(b-a)^2}{1\cdot 2} + \text{ꝛc.}$$

Theilt man abermals den Zwischenraum $b-a$ in n gleiche Theile deren jeder $=i$ ist; so findet man nach der letztern Formel:

$$f(a+i) - fa = A_1 i - A'_1 \frac{i^2}{2} + A''_1 \frac{i^3}{2\cdot 3} - \text{ꝛc.},$$

$$f(a+2i) - f(a+i) = A_2 i - A'_2 \frac{i^2}{2} + A''_2 \frac{i^3}{2\cdot 3} - \text{ꝛc. u. s. w.}$$

$$f(a+ni) - f[a+(n-1)i] = A_n i - A'_n \frac{i^2}{2} + A''_n \frac{i^3}{2\cdot 3} - \text{ꝛc.}$$

Durch Summirung dieser Reihen entsteht:

$$\begin{aligned} f(a+ni) - fa = fb - fa = & (A_1 + A_2 + \;.\;.\;.\; A_n)\, i \\ & -(A'_1 + A'_2 + \;.\;.\;.\; A'_n) \frac{i^2}{2} \\ & +(A''_1 + A''_2 + \;.\;.\;.\; A''_n) \frac{i^3}{2\cdot 3} \text{ ꝛc. } (2), \end{aligned}$$

bei welcher Formel dasselbe gilt, was von der vorhergehenden (1) gesagt worden.

Anmerkungen: I. Durch eine vergleichende Zusammenstellung der beiden Formeln (1) und (2) lassen sich leicht die Grenzen der Annäherung für das Integral $\int_a^b zdx$ bestimmen. Denn sind die Werthe der Funktion z von $x=a$ bis $x=b$ im Zunehmen begriffen, d. h. ist die Reihe $A, A_1, A_2 \ldots$ steigend; so sind die entsprechenden Werthe $A'_1, A'_2 \ldots$ von z' sämmtlich positiv. Man hat daher:

$$\int_a^b zdx > (A + A_1 + \ldots A_{n-1})i,$$
$$< (A_1 + A_2 \ldots A_n)i.$$

Nehmen hingegen die aufeinanderfolgenden Werthe der Funktion z von $x=a$ bis $x=b$ ab, so sind die Werthe $A', A'_1, A'_2 \ldots$ sämmtlich negativ: man hat dann:

$$\int_a^b zdx < (A + A_1 + \ldots A_{n-1})i,$$
$$> (A_1 + A_2 \ldots A_n)i.$$

Der Unterschied $(A_n - A)i$ der beiden letzten Reihen, zwischen denen der wahre Werth des Integrals eingeschlossen bleibt, wird desto kleiner, je mehr i abnimmt.

Das hier Gesagte setzt übrigens voraus, daß die Funktionen z und z' zwischen $x=a$ und $x=b$ ihre Zeichen nicht ändern und nicht unendlich groß werden.

II. Zu einem weitern Studium über die näherungsweise Berechnung der Integrale verweisen wir auf nachstehende Werke:

1. Euler's Anleitung zur Integralrechnung, 7tes Kapitel.
2. Crelle's Sammlung mathematischer Aufsätze 1ster Band.
3. Gauß im dritten Bande der Abhandlungen der Göttinger Universität vom Jahr 1816.
4. Poisson, dans les mémoires de l'institut 1826.
5. Fourier, dans la Théorie de la chaleur.
6. Cauchy, dans le mémoire sur les intégrales définies et dans les exercices de mathématiques (première et seconde année).

§. 159. Bei der Integration der höhern Differentiale brauchen wir nicht lange zu verweilen, weil sie sich auf das bisher Auseinandergesetzte zurückführen läßt. Wollte man z. B. von dem Differential

der zweiten Ordnung $d^2y=zdx^2$, wo z irgend eine Funktion von x bezeichnet, zur primitiven Funktion zurückkehren; so kann dies nur durch eine zweimalige Integration bewerkstelligt werden. Man erhält nämlich durch eine erste Integration:

$$\frac{dy}{dx}=\int zdx + C.$$

Durch eine zweite Integration entspringt:

$$y=\int dx\int zdx + Cx + C',$$

wo C' eine neue willkührliche Constante ist und der Ausdruck $\int dx\int zdx$ zwei aufeinanderfolgende Integrationen andeutet.

Ebenso erhält man für das Differential der dritten Ordnung $d^3y=zdx^3$, wo z wieder eine Funktion von x ist:

$$y=\int dx\int dx\int zdx+Cx^2+C'x+C'',$$

wo C, C', C'' willkührliche Constanten darstellen und in dem ersten Gliede des zweiten Theils drei aufeinanderfolgende Integrationen angedeutet sind.

Diese Constanten lassen sich nicht reduciren, weil jede mit einer andern Potenz von x multiplicirt ist; es entstehen daher in jedem höhern Integrale ebensoviele willkührliche Constanten, als Einheiten in der Zahl, welche die Ordnung des Differentials angibt, enthalten sind.

Anmerkung. Die wiederholten Integrationen pflegt man, abgesehen von den Constanten, auf folgende einfache Art anzudeuten. Für:

$d^2y=zdx^2$ hat man $y=\int^2 zdx^2$. Allgemein für:

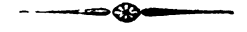
$d^n y=zdx^n$ ebenso $y=\int^n zdx^n$.

Beispiele: 1. Für $\int^2\frac{(a^2-x^2)dx^2}{(x^2+a^2)^2}$ erhält man nach der ersten Integration, da der vorgelegte Bruch mit $\frac{2a^2\,dx^2}{(x^2+a^2)^2}-\frac{dx^2}{x^2+a^2}$ gleichgeltend ist: $\frac{x}{x^2+a^2}+c$; es bleibt daher von Neuem $\frac{xdx}{x^2+a^2}+cdx$ noch zu integriren übrig. Man findet hiernach:

$$\int^2\frac{(a^2-x^2)dx^2}{(x^2+a^2)^2}=l\sqrt{(x^2+a^2)}+cx+c'.$$

2. Für $d^3y = x^2dx^3$ erhält man:

$$y = \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \tfrac{1}{2}cx^2 + c'x + c''.$$



Viertes Kapitel.

Anwendung der Integralrechnung.

Von der Quadratur und der Rectifikation der Curven.

§. 160. Für den Flächeninhalt t, welcher zwischen einem beliebigen Bogen der Curve, den zwei dazu gehörigen Ordinaten und dem entsprechenden Abscissenstück liegt, hat man $t = \int y dx$, wo es jetzt blos noch darauf ankommt, nachdem für y sein Werth fx gesetzt worden, die Integration zwischen den passenden Grenzen zu vollziehen. Weil die Quadratur der ebenen Curven auf der Integration der Differentialformel zdx, wo z eine Funktion von x ist, beruht; so hat man auch umgekehrt alle Probleme, welche zuletzt von der Integration einer Differentialformel mit einer Unbekannten abhängen, Quadraturen genannt.

Wir wollen nun einige der bekanntesten krummen Linien quadriren.

1. Für die Parabeln der verschiedenen Ordnungen $y^m = ax^n$ erhält man $t = \frac{mxy}{m+n}$, wo die Constante ausgelassen ist, weil, wenn der Inhalt t mit dem Ursprung anheben soll, der Ausdruck $\frac{mxy}{m+n}$ für $x = 0$ von selbst verschwindet. Alle Parabeln sind daher quadrirbar, d. h. es läßt sich ein endlicher algebraischer Ausdruck für ihre Fläche angeben.

Anmerkung. Alle parabolischen Abschnitte haben ein constantes Verhältniß zu dem aus der Abseisse und Ordinate construirten Rechtecke.

Für $n=m$ geht die Parabel in eine gerade Linie und der Abschnitt in ein Dreieck über, dessen Werth $\frac{1}{2}xy$ ist, was mit dem aus der Elementargeometrie bekannten Resultate genau übereinstimmt.

2. Für die gleichseitige Hyperbel MM' (Fig. 39) zwischen ihren Asymptoten Ax, Ay hat man $xy=m^2$; folglich $t=\int y dx=m^2 lx+c$.

Man kann die Fläche t nicht von der Achse Ay anfangen lassen, weil $x=0$ uns $t=0$ und $C=\infty$ liefern würde. Hebt man aber bei den Flächenräumen mit der Ordinate BC an, die dem Scheitel C entspricht; so erhält man, wenn erwogen wird, daß $AB=m$ ist, $C=-m^2 lm$, woraus $t=m^2 l\frac{x}{m}$. Hieraus entspringt, wenn man $m=1$ annimmt, $t=lx$: die Neperschen Logarithmen stellen daher die asymptotischen Räume der gleichseitigen Hyperbel dar.

Ist α der Asymptotenwinkel, so erhält man:

$$t=\int y dx \sin\alpha=\sin\alpha lx=\log x,$$

wenn man die Fläche wieder von CB zählt und das Logarithmensystem nimmt, das $\sin\alpha$ zum Modul hat. Der Modul der gewöhnlichen Logarithmen ist 0,43429448; folglich der Asymptotenwinkel derjenigen Hyperbel, deren Räume die gemeinen Logarithmen darstellen, gleich $25^0 44' 25''$.

3. Für den auf den Mittelpunkt bezogenen Kreis $y^2=a^2-x^2$ hat man: $t=\int\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx=\int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, wenn man oben und unten mit $\sqrt{(a^2-x^2)}$ multiplicirt. Das zweite Glied läßt sich mittelst der theilweisen Integration leicht integriren, weil $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ das Differential von $-\sqrt{(a^2-x^2)}$ ist. Man erhält hiernach: $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-x\sqrt{(a^2-x^2)}+\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}=-xy+t$.

Daraus entspringt durch Substitution und Versetzung:

$$t=\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Die auf den Kreis angewendete allgemeine Formel:

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ gibt aber $ds = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$;

folglich, wenn man den Bogen s zwischen denselben Grenzen als das vorgelegte Integral nimmt, $t = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}as + C$. Es sei $CA = b$, $AB = k$ (Fig. 11): verdoppeln und integriren wir dann von $x = b$ bis $x = a$, um die Fläche des Segments BOB' zu erhalten; so bekommen wir dafür den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}a \times \text{arc } BOB' - bk.$$

Addiren wir hierzu das Dreieck CBB', so haben wir:

Kreisausschnitt $CBOB' = \frac{1}{2}CO \times \text{arc } BOB'$,

wie es auch in der Elementargeometrie gefunden ist.

Entwickelt man in dem Ausdruck $t = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ die Wurzelgröße, so hat man:

$$t = a\int dx \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4a^4} - \frac{1 \cdot 3x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6a^6} - \text{rc.}\right);$$

woraus, wenn von $x = 0$ integrirt wird,

$$t = ax - \frac{x^3}{2 \cdot 3a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5a^3} - \frac{1 \cdot 3x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7a^5} - \text{rc.}$$

4. Für die Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ hat man:

$$t = \int \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}dx = \frac{b}{a} \times z,$$

wobei z den zwischen den entsprechenden Grenzordinaten enthaltenen Abschnitt des umgeschriebenen Kreises bezeichnet. Die Flächenräume t und z stehen demnach in dem constanten Verhältniß von b zu a zu einander; d. h. die Fläche einer Ellipse verhält sich zu jener des umgeschriebenen Kreises, oder überhaupt die Fläche eines elliptischen Segments verhält sich zu jener des entsprechenden Kreissegments wie die kleine Achse zur großen. Es ist demnach die Fläche der ganzen Ellipse $= \pi ab$, da πa^2 der Flächeninhalt des umgeschriebenen Kreises ist.

5. Für die Cycloide FMA (Fig. 5), wo der Ursprung in F angenommen wird, sei $FS = x$, $SM = y$. Wir haben dann:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)}, \; t = \int y dx = \int \sqrt{(2ry - y^2)}dy.$$

Dies Integral drückt das Flächenstück FKN des Erzeugungskreises aus; folglich Fläche $FyAM = FKEF = \frac{1}{2}\pi r^2$. Wegen $AE = \pi r$ und Rechteck $yE = 2\pi r^2$ entsteht $AFE = \frac{3}{2}\pi r^2$. Der Flächeninhalt AFA′ der ganzen Cycloide beträgt daher das Dreifache von jenem des Erzeugungskreises.

6. Für die Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ findet man:

$$t = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{(2ca - x)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{x^2 dx}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3a^2}{2} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x - a}{a}\right) - \frac{3a + x}{2}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Die ganze Fläche der Cissoide findet man dreimal so groß als die Fläche des Kreises, dessen Radius $= a$.

Anmerkung. Eine unbegrenzte Fläche ist hier demnach einer begrenzten an Größe gleich; gerade so wie eine endliche Zahl einer unendlichen Reihe von Zahlen gleich sein kann, was wir an dem Beispiele $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ sehen.

§. 161. Die Methode von Simpson zur näherungsweisen Bestimmung krummliniger Flächenstücke verdient, daß wir sie hier mittheilen.

Wir wollen vorerst den Flächeninhalt eines kleinen Segments CEM (Fig. 40) einer beliebigen, auf die rechtwinkligen Achsen Ax, Ay bezogenen Curve suchen, wobei wir durch α den Winkel MCH, welchen die Sehne CM mit der Achse Ax macht, bezeichnen. Nachdem durch die Mitte K zwischen den äußersten Ordinaten CB, MP die Ordinate KE gezogen worden, können wir ohne merklichen Fehler den Bogen CM als einer Parabel angehörig betrachten, deren Scheitel L der Mitte l der Sehne entspricht. Hiernach wäre die Fläche des Segments $CEMl = \frac{2}{3} CM \cdot Ll$. Die Dreiecke LEl, MCH geben aber:

$$Ll = El \cos\alpha,\ CM = \frac{CH}{\cos\alpha} \text{ folglich: } CEMl = \tfrac{2}{3} El \times CH.$$

Dies vorausgeschickt, besteht nun, wenn wir:

$$BK = KP = h,\ CB = y',\ KE = y'',\ PM = y'''$$

machen, die Fläche CBPME aus dem Trapez $CBPMl = h\,(y' + y''')$ und dem Segmente $CEMl = \frac{4}{3} h \cdot El$.

Es ist aber $EI = EK - KI = \frac{1}{2}(2y'' - y' - y''')$; folglich das Segment
$CEMI = \frac{2}{3}h(2y'' - y' - y''')$ und die kleine Fläche
$CEMPB = \frac{2}{3}h(\frac{1}{2}y' + 2y'' + \frac{1}{2}y''')$.

Wir wollen jetzt einen Ausdruck für das durch die Curve AC, die Gerade BD und die Ordinaten AB, CD begränzte Flächenstück BACD (Fig. 41) aufsuchen. Wir theilen deshalb die Basis BD in eine gerade Anzahl Theile, deren jeder die Länge h hat, ziehen hierauf durch die Theilungspunkte die Ordinaten y', y'', $y''' \ldots y^n$. Die fragliche Fläche wird dadurch in Elemente zerlegt, deren respective Inhalte zu je zwei in der obigen Formel ihren Ausdruck haben. Das zweite und dritte Element z. B. sind hiernach:

$$\frac{2}{3}h(\frac{1}{2}y''' + 2y^{IV} + \frac{1}{2}y^{V}),\ \frac{2}{3}h(\frac{1}{2}y^{V} + 2y^{VI} + \frac{1}{2}y^{VII}) \ldots$$

Nimmt man die Summe aller dieser Elemente, so hat man:

$$BACD = \frac{2}{3}h(\frac{1}{2}y' + 2y'' + y''' + 2y^{IV} + y^{V} \ldots + \frac{1}{2}y^{(n)}),$$ oder:
$$= \frac{2}{3}h[(y' + y'' + \ldots y^{(n)}) + y'' + y^{IV} \ldots + y^{(n-1)} - \frac{1}{2}(y' + y^n)].$$

Die darin enthaltene Regel lautet folgendermaßen: Man ziehe eine ungerade Anzahl gleichweit abstehender Ordinaten, nehme hierauf die Summe derselben, desgleichen die der geradstelligen weniger der Hälfte der beiden äußersten; das Resultat mit $\frac{2}{3}$ des gemeinsamen Abstandes h der Ordinaten multiplicirt, gibt dann den gesuchten Flächeninhalt.

Die nämliche Regel findet offenbar auch für den Fall ihre Anwendung, in welchem die Fläche, wie ACFE, durch zwei entgegengesetzte Curven begränzt ist, indem dann y', y'', $y''' \ldots$ die Gesammtlängen der verschiedenen Parallelen darstellen.

Je kleiner h ist, desto näher wird das Resultat der fraglichen Fläche kommen. Uebrigens läßt sich unsere Regel für jede unregelmäßige Fläche gebrauchen, weil man solche in verschiedene andere Flächenstücke zerlegen kann, deren jedes besonders zu berechnen ist, wobei man hernach theils addirt, theils subtrahirt, wie es die Umstände gerade mit sich bringen. Sollte die Basis durch die Curve selbst geschnitten werden, so gilt die nämliche Regel, indem dann die Ordinate des Durchschnittspunktes gleich Null gesetzt wird.

§. 162. Folgende Bemerkungen mögen hier ihren Platz finden.

1) Liegt die Fläche t zwischen den Aesten BM, DK (Fig. 42) einer und derselben Curve oder zwischen zwei beliebigen gegebenen

Curven, deren Ordinaten PM, PE durch $Y=Fx$, $y=fx$ dargestellt werden; so hat man:

$$BCPM=\int Ydx,\ DCPE=\int ydx;\ \text{woraus}\ BDEM=\int(Y-y)dx.$$

2. Obschon die Methode des Unendlichkleinen an klarer Bestimmtheit der Grenzmethode nachsteht, so kann man doch die erstere statt der letztern, von welcher sie eigentlich nur ein abgekürzter Ausdruck ist, in Anwendung bringen. Wir thun dies hier um so lieber, da jene kürzere Methode in zwei der berühmtesten Werken der mathematischen Literatur, in der analytischen Mechanik von Lagrange und in der Mechanik des Himmels von La Place, wie überhaupt in der gesammten angewandten Mathematik mit großem Vortheil gebraucht wird.

Nach dieser Methode kann man die Fläche t als die Summe unendlich vieler kleiner Rechtecke wie m ansehen, deren Seiten dx und dy sind, wonach dxdy das Element der Fläche t ist; es bleibt hiernach nur noch $\iint dxdy$ zwischen den passenden Grenzen zu integriren übrig. Für das zwischen den zwei Curven BM, DE liegende Flächenstück BDEM integriren wir dydx zunächst in Bezug auf y, indem wir das Integral ydx von $PE=fx=y$ bis $PM=Fx=Y$ nehmen, was uns den Ausdruck $(Y-y)dx$ liefert, welchen wir jetzt noch in Bezug auf x zwischen den Grenzen AC und AP zu integriren haben. Liegt der fragliche Flächenraum innerhalb des Umfanges einer geschlossenen Curve, so muß man $(Y-y)dx$ von dem kleinsten Werthe von x bis zu seinem größten integriren.

Die entgegengesetzt liegenden Parabeln AF, AF′ (Fig. 46) haben zu Gleichungen $y^2=2px$, $y^2=-2px$. Integriren wir das Element $m=dxdy$ in Bezug auf x von M′ bis M, d. h. von $-\frac{y^2}{2p}$ bis $+\frac{y^2}{2p}$; so liefert das Integral xdy für den Inhalt der dünnen Scheibe MM′ den Ausdruck $\frac{y^2dy}{p}$. Eine zweite von $y=0$ anhebende Integration, d. h. von A bis C, gibt die Fläche $F'AFC=\frac{y^3}{3p}$ oder $\frac{2}{3}xy$.

Nehmen wir ebenso in dem Kreise CB (Fig. 43) an einer beliebigen Stelle das Element m, dessen Lage durch den Abstand $Cm=u$ und den Winkel $mCx=\vartheta$ bestimmt wird; so kann der Flächeninhalt des Elements durch $dud\vartheta$ dargestellt werden. Das in Bezug auf ϑ

genommene Integral ist ϑdu, woraus, wenn man von $\vartheta=0$ bis $\vartheta=2\pi u$ geht, $2\pi u du$ für die Fläche eines kreisförmigen Ringes entsteht, der die unendlich kleine Breite du hat. Wird das allgemeine Integral πu^2 von C an, wo $u=0$ bis zum Umfang B, wo $u=R=$ dem Radius des Kreises ist, genommen; so findet man πR^2 für die Fläche des Kreises.

Es sei ferner u die Sehne AB (Fig. 44), welche das Kreissegment AOB abschneidet, dessen Flächeninhalt gesucht wird, und $AC=a$ der Radius des Kreises. Man kann das Differentialdreieck BAb, dessen Inhalt $dt=-\frac{1}{2}u^2 d\alpha$ ist, als Element der fraglichen Fläche ansehen, wo α den Winkel BAD bezeichnet: man nimmt hier das Zeichen —, weil mit dem Wachsen von t ein Abnehmen von α verbunden ist. Das rechtwinklige Dreieck ABD gibt aber $u=2a\cos\alpha$, woraus:

$$du=-2a\sin\alpha d\alpha,\; d\alpha=\frac{-du}{2a\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}=\frac{-du}{\sqrt{(4a^2-u^2)}}.$$

Hiernach entsteht aus $dt=-\frac{1}{2}u^2 d\alpha$:

$$t=\int\frac{1}{2}u^2\frac{du}{\sqrt{(4a^2-u^2)}}=\int\frac{1}{2}u^2 du\,(4a^2-u^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$t=\int\frac{u^2du}{4a}\left(1+\frac{1u^2}{2\cdot 2^2a^2}+\frac{1\cdot 3u^4}{2\cdot 4\cdot 2^4a^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^6a^6}+\text{etc.},\right)$$

$$t=\frac{1}{4a}\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{2\cdot 5\cdot 2^2\cdot a^2}+\frac{1\cdot 3u^7}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 2^4a^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5u^9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9\cdot 2^6a^6}\cdots\right).$$

wo dies von $u=0$ an beginnende Integral die Fläche des Segments ausdrückt, dessen Sehne u ist. Macht man $u=2a$, so hat man die Fläche des Halbkreises

$$=\frac{1}{2}(2a)^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 7}\;\cdots\right).$$

Indem man diesen Ausdruck gleich $\frac{1}{2}\pi a^2$ setzt, entspringt für π folgende convergirende Reihe:

$$\pi=4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 11}+\text{etc.}\right),$$

deren Fortgang leicht zu übersehen ist.

3. Ist die gesuchte Fläche zwischen vier Curvenästen, wie BM, BI, IK, KM eingeschlossen; so theilt man die Fläche durch Linien, welche den Achsen parallel laufen, in solche Stücke, von denen sich jedes einzelne nach der obigen Methode behandeln läßt.

4. Die Ordinate y der Curve darf zwischen den Grenzwerthen von x der Fläche nicht unendlich werden.

5. Der Inhalt einer Curve ist positiv, wenn Ordinate und Abscisse einerlei Zeichen haben, und negativ, wenn das Gegentheil statt findet.

6. Wenn die Curve die Abscissenachse zwischen den Grenzwerthen von x schneidet, so muß man jeden der zwei dabei vorkommenden Flächentheile besonders berechnen und sie dann addiren, weil der eine davon positiv und der andere negativ ist und die verlangte Summe ohne Rücksicht auf das letzte Zeichen genommen werden muß. Für die Curve KACD (Fig. 46) z. B., deren Gleichung ist $y=x-x^3$, wo $AK=AI=1$ und der Ursprung in A liegt, hat man die Fläche $t=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+c$. Soll dieselbe im Punkt B, für welchen $AB=\sqrt{\frac{1}{3}}$, ihren Anfang nehmen; so findet man $c=-\frac{5}{36}$, woraus $t=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{36}$. Für den Fall, daß die Fläche bei ED, wo $AE=\sqrt{\frac{5}{3}}$ ist, endigt, findet man $t=0$, was bloß anzeigt, daß die Flächen BCI, IED einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. Und in der That sieht man bald, daß $BCI=\frac{1}{9}=-DIE$; desgleichen, daß

$$ACI=\tfrac{1}{4}=-KOA.$$

§. 163. Um eine Anwendung von der Formel (§. 83) $\tau'=\frac{1}{2}(xy'-y)$ zu geben, welche dazu dient, die zwischen zwei Leitstrahlen enthaltene Fläche zu finden, wollen wir das elliptische Flächenstück CMO (Fig. 11) suchen. Man hat hier:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y},\ \text{woraus:}$$

$$\tau'=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2x^2}{a^2y}+y\right)=-\frac{b^2}{2y},\quad d\tau=-\frac{abdx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

Das negative Zeichen rührt daher, daß x abnimmt, wenn τ wächst, indem die Fläche τ von einem fixen Leitstrahl, wie CO, bis zum Leitstrahl CM gezählt wird. Nun liefert aber die allgemeine Rectifikationsformel auf den Kreis vom Radius a angewandt, für die Länge seines Bogens s die Differentialformel $ds=-\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$; folglich $d\tau=\frac{1}{2}bds$ und $\tau=\frac{1}{2}bs$, wenn man den Bogen s zwischen denselben Grenzen wie τ, d. h. von $x=CO$ bis $x=CA$ nimmt. Für $b=a$ bekommt man $\tau=\frac{1}{2}as$; mithin der Kreisausschnitt:

$BCO = \frac{1}{2} CO \times arc BO$; und der Ellipseausschnitt

$MCO = \frac{1}{2} b \times arc BO = \frac{b}{a} \times OCB.$

Für die Hyperbel MN (Fig. 39) ist $xy = m^2$, woraus $\tau' = -y$ und $d\tau = -y dx$, $\tau = -\int y dx$: also der hyperbolische Ausschnitt
$CAM = CBPM.$

§. 164. Ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, so hat man für das Differential des Sectors die Formel $d\tau = \frac{1}{2} u^2 d\vartheta$. Als Beispiele mögen die Lemniscate und Cardioide dienen. Die Polargleichung der ersten Curve (Fig. 48) ist $u^2 = a^2 \cos 2\vartheta$; folglich $\tau = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\vartheta + C$. Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$, so erhält man für den vierten Theil den von der Curve eingeschlossenen Flächenraum OMA den Ausdruck $\frac{1}{4} a^2$.

Die Gleichung der zweiten Curve (Fig. 49) ist $u = a(1 + \cos\vartheta)$; mithin die Fläche $AMBA = \frac{3}{4} a^2 \pi$, wenn von $u = 0$ bis $u = 2a$ integrirt wird.

§. 165. Das Differential des Bogens einer Curve mit rechtwinkligen Coordinaten ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, woraus die Länge dieses Bogens erhalten wird, wenn man mittelst der vorgelegten Gleichung der Curve den Ausdruck von s auf die Form fxdx oder fydy bringt und dann das Resultat zwischen den schicklichen Grenzen integrirt. Es mögen jetzt einige Beispiele darüber folgen.

1. Für die Appolonische Parabel hat man $y^2 = 2px$, woraus $s = \int \frac{dy}{p} \sqrt{(y^2 + p^2)}$. Die Integration liefert:

$$s = c + \frac{y}{2p} \sqrt{(p^2 + y^2)} + \frac{1}{2} p l [y + \sqrt{(p^2 + y^2)}].$$

Wenn man den Bogen mit y zugleich verschwinden läßt, kommt $c = -\frac{1}{2} p l p$; mithin (Fig. 7) Bogen

$$ACM = \frac{y\sqrt{(y^2 + p^2)}}{2p} + \frac{1}{2} p l \left(\frac{y + \sqrt{(p^2 + y^2)}}{p} \right).$$

2. Für die Neil'sche Parabel, deren Gleichung $y^3 = ax^2$ ist, hat man: $s = \int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \frac{8}{27} a \sqrt{\left[\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^3\right]} + c.$

Nehmen wir die allgemeine Gleichung $y = ax^n$, welche die Familien der Parabeln und der Hyperbeln darstellt, je nachdem n ein positiver

oder negativer Bruch ist, so findet man $s = \int dx \sqrt{(1 + n^2 a^2 x^{2n-2})}$. Dieses Integral läßt sich jederzeit durch einen geschlossenen algebraischen Ausdruck darstellen, wenn $\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl ist. In solchem Falle wären dann unsere Curven rectifikabel, während für die übrigen der Bogen nur approximativ oder durch transcendente Funktionen angegeben werden kann.

3. Für den Kreis, dessen Gleichung $y^2 = r^2 - x^2$ oder $y^2 = 2rx - x^2$ ist, je nachdem der Ursprung im Mittelpunkt oder im Endpunkt des Durchmessers liegt, hat man:

$$s = \int \frac{r dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \text{ oder } s = \int \frac{r dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}.$$

Beide Integrale lassen sich nur durch Reihen oder Kreisbogen bestimmen, wodurch die Aufgabe wieder auf den Punkt, von dem man ausgegangen ist, zurückgeführt wird.

4. Für die Cycloide, wenn der Ursprung in F liegt (Fig. 5), ist $y' = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}$. Man zieht daraus $s = 2\sqrt{2ry}$. Es wird keine Constante hinzugefügt, wenn man den Bogen in F seinen Anfang nehmen läßt. Nun ist $\sqrt{(2ry)} = KF$: mithin FM = 2mal der Sehne KF.

5. Für die Ellipse, deren Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist, erhält man, wenn $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ gesetzt wird, $s = \int dx \sqrt{\left(\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}\right)}$, oder, wenn man $x = az$ macht, $s = a \int dz \sqrt{\left(\frac{1 - e^2z^2}{1 - z^2}\right)}$, ein Integral, welches sich nur näherungsweise bestimmen läßt. Man entwickele zu diesem Behufe $\sqrt{(1 - e^2z^2)}$ in eine Reihe und schreite dann zur Integration der einzelnen Glieder. Man findet auf diese Weise, wenn für z sein Werth $\frac{x}{a}$ hergestellt wird:

$$s = a \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + \tfrac{1}{2} a e^2 \left[\frac{x}{2a}\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)\right]$$
$$+ \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} a e^4 \left[\left(\frac{x^3}{4a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x}{a}\right)\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\right.$$
$$\left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)\right] + \text{etc.},$$

wobei die Constante verschwindet, wenn $s = 0$ für $x = 0$.

Hiernach findet man für den Umfang der ganzen Ellipse den Ausdruck:

$$s = 2\pi a \left[1 - (\tfrac{1}{2}e)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}e^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}e^3\right)^2 - \text{ꝛc.}\right].$$

Der elliptische Bogen DM (Fig. 5) läßt sich auch durch den entsprechenden Bogen yB des über der großen Achse beschriebenen Kreises ausdrücken. Ist nämlich für einen beliebigen Punkt B desselben, Winkel $yCB = \varphi$, so ist $x = a \sin\varphi$: woraus man erhält:

$$s = a\int d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)},$$

ein Integral, welches sich ebenfalls nur durch unendliche Reihen bestimmen läßt.

6. Für die Hyperbel ist $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Hiernach:

$$s = \int \frac{dx}{e} \sqrt{\left(\frac{x^2 - a^2e^2}{x^2 - a^2}\right)}, \text{ wenn man } \frac{a^2}{a^2 + b^2} = e^2 \text{ setzt,}$$

ein Ausdruck, welchen man ebenfalls nur näherungsweise integriren kann. Nachdem $\sqrt{(x^2 - a^2e^2)}$ entwickelt und hierauf integrirt worden, erhält man für den hyperbolischen Bogen, vom Scheitel der Curve gezählt, den Ausdruck:

$$s = \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{e}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} e^4 \frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \left(\frac{a^4}{x^4} + \frac{3}{2}\frac{a^2}{x^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^8 \left(\frac{a^6}{x^6} + \frac{5a^4}{4x^4} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{a^2}{x^2}\right) \ldots\right]$$
$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} e^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^6 \ldots\right]$$
$$e a \operatorname{arc}\left(\sec = \frac{x}{a}\right).$$

Anmerkungen: 1. Setzt man hier, wie bei der Ellipse,

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b\sqrt{-1} \cdot \cos\varphi,$$

so bekommt man für den hyperbolischen Bogen, wenn:

$a^2 + b^2 = a^2e^2$ ist, $s = a\int d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)}$.

2. Die elliptischen und hyperbolischen Bogen bilden eine eigene Klasse transcendenter Größen, indem sie aus einer unendlichen Reihe von Gliedern bestehen, deren jedes selbst wieder eine unendliche Reihe ausmacht.

§. 166. Wir wollen noch ein Paar Beispiele der Anwendung der Formel $ds=\sqrt{(u^2d\vartheta^2+du^2)}$ anführen, welche das Differential des Bogens einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve darstellt. Für die Archimedische Spirale, wo $2\pi u=a\vartheta$, hat man:

$$s=\int\frac{2\pi du}{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{4\pi^2}+u^2\right)}.$$

Dies Integral ist von derselben Form wie jenes von dem Bogen der gewöhnlichen Parabel, woraus hervorgeht, daß die Rectifikation der Archimedischen Spirale auf die jener Curve hinausläuft. Für die Cardioide $u=a(1+\cos\vartheta)$ findet man, wenn von $u=0$ bis $u=2a$ integrirt wird, daß der Bogen $AmB=4a$ ist (Fig. 49).

Von der Kubatur der Körper und der Complanation ihrer Oberflächen.

§. 167. Das Volumen v und die Oberfläche u des durch die Umdrehung einer Curve um die Achse der x entstandenen Körpers findet man, wenn man in die Formeln $v=\int\pi y^2dx$, $u=\int 2\pi y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ aus der Gleichung der Linie für y seinen Werth setzt und dann die Integration bewerkstelligt. Wir wollen nun jene Formeln auf einige Beispiele anwenden.

1. Wählt man die Gleichung $y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$, so erhält man für das Volumen des durch Umdrehung der Ellipse um ihre große Achse erzeugten Körpers, $v=\frac{\pi b^2x}{a^2}(a^2-\frac{1}{3}x^2)$, wenn v mit x verschwindet. Hieraus entspringt das Volumen des ganzen verlängerten Sphäroids gleich $\frac{4}{3}ab^2\pi$. Wird $b=a$, so geht das Sphäroid in eine Kugel über, und der Inhalt ist gleich $\frac{4}{3}\pi a^3$, wie in der Elementargeometrie.

Für die Oberfläche dieses Sphäroids hat man, wenn $a^2e^2=a^2-b^2$ ist:

$$u=\frac{2\pi b}{a}\int dx\sqrt{(a^2-e^2x^2)}.$$

Das Integral dieses Ausdrucks ist:

$$u=\frac{b\pi x}{a}\sqrt{(a^2-e^2x^2)}+\frac{ab\pi}{e}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{ex}{a}\right).$$

Hieraus ergibt sich für die Oberfläche des ganzen verlängerten Sphäroids:

$$u = 2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{e} \text{ arc}(\sin = e).$$

Macht man $a = b$, so wird $\frac{1}{e}\text{arc}(\sin = e) = 1$; daher die Oberfläche der Kugel gleich $4a^2\pi$.

Anmerkungen: I. Für das abgeplattete Sphäroid, d. h. dasjenige, welches durch Rotation um die kleine Achse entsteht, hat man, wenn die kleine Achse zugleich die der x ist:

$y = \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - x^2)}$; folglich:

$$v = \frac{\pi a^2}{b^2}\int(b^2 - x^2)\,dx = \frac{a^2\pi x}{b^2}\left(b^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Also das Volumen des ganzen abgeplatteten Sphäroids gleich $\frac{4}{3}a^2b\pi$. Man sieht hieraus, daß sich das Volumen des verlängerten Sphäroids zu jenem des abgeplatteten verhält, wie b zu a.

II. Für die Oberfläche dieses Sphäroids hat man, wenn wieder $a^2e^2 = a^2 - b^2$ ist:

$$u = \frac{2a\pi}{b^2}\int dx\sqrt{(b^4 + a^2e^2x^2)}, \text{ oder:}$$

$$u = \frac{a\pi}{b^2}\sqrt{(b^4 + a^2e^2x^2)} + \frac{b^2\pi}{e}\log\left[aex + \sqrt{(b^4 + a^2e^2x^2)}\right] + C.$$

Hieraus ergibt sich für die Oberfläche des ganzen abgeplatteten Sphäroids:

$$u = 2a^2\pi + \frac{b^2\pi}{e}\log\frac{1+e}{1-e}.$$

Für $a = b$ wird $\frac{1}{e}\log\frac{1+e}{1-e} = 2$; folglich die Oberfläche der Kugel, wie zuvor, gleich $= 4a^2\pi$.

2. Für den durch die Rotation der Parabel $y^2 = ax$ um die Achse der x entstandenen Körper findet man $v = \frac{1}{2}x \cdot y^2\pi$, wo v mit x verschwindet.

Ferner $u = \frac{\pi}{6a}(a^2 + 4ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}a^2\pi$, wo wieder u mit x zugleich Null wird.

3. Für die Oberfläche des hyperboloischen Konoids, wo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, und die Rotationsachse die Hauptachse ist, findet man, wenn $e^2=a^2+b^2$ gesetzt wird, und der Körper bei $x=a$ seinen Anfang nimmt:

$$u=\pi b\left(\frac{x\sqrt{(e^2x^2-a^4)}}{a^2}-b-\frac{a^2}{e}\,l\,\frac{ex+\sqrt{(e^2x^2-a^4)}}{a(b+e)}\right).$$

4. Für das Volumen des durch die Logistik $y=e^{\frac{x}{a}}$ entstandenen Körpers erhält man $v=\frac{1}{2}\pi a(y^2-1)$, wenn v mit x zugleich verschwindet.

§. 168. Das Volumen V und die Oberfläche U eines Körpers überhaupt werden durch die Formeln:

$$V=\iint z\,dx\,dy,\quad U=\iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$$

bestimmt. Wie man diese doppelten Integrale zu verstehen habe, ergibt sich aus Folgendem. Nachdem statt z, p und q ihre aus der Gleichung der vorgelegten Fläche hergeleiteten Werthe in x und y substituirt worden, integrire man, wobei das einemal x und das anderemal y als constant angesehen wird, oder umgekehrt, je nachdem dieses oder jenes Verfahren einfachere Rechnungen darbietet. Hierauf hat man auf die Grenzen, welche die Aufgabe angibt, gehörige Rücksicht zu nehmen. Verlangt man z. B., daß die Oberfläche U zwischen zwei zur Coordinatenebene xz in den Abständen $y=a$, $y=b$ parallellaufenden Ebenen eingeschlossen sein soll, so wird man das Integral zwischen den Grenzen a und b nehmen, indem man x als constant ansieht. Dies erste Integral wird von der Form $\varphi x\,dx$ sein, kein y mehr enthalten und die Oberfläche eines Körperstückes ausdrücken, dessen Dicke dx unendlich klein ist. Indem man dann von Neuem in Bezug auf x und zwar von dem kleinsten bis zum größten Werthe dieser Veränderlichen integrirt, erhält man die verlangte Fläche, welche hiernach als die Summe einer unendlichen Anzahl der vorhergehenden analoger Zonen angesehen wird.

Wenn der fragliche Körper seitwärts von krummen Flächen begrenzt ist, so stehen die Grenzwerthe der einen Veränderlichen mit den Grenzwerthen der andern in Verbindung, was zu berücksichtigen ist. Wählen wir die Kugel zum Beispiel, so folgen aus ihrer Gleichung $x^2+y^2+z^2=r^2$ die Werthe:

$p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, $\sqrt{(1+p^2+q^2)} = \frac{r}{z}$; mithin:

$U = \iint \frac{r dx dy}{\sqrt{(r^2-y^2-x^2)}}$, oder, wenn man $r^2-y^2=A^2$ macht:

$U = \iint \frac{r dx}{\sqrt{(A^2-x^2)}} dy.$

Eine erste Integration liefert $r dy \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{A}\right)$. Nun schneidet die Coordinatenebene xy die Kugel in einem Kreise Cy (Fig. 50), dessen Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ist und für welchen die Abscisse $AF = \pm\sqrt{(r^2-y^2)} = \pm A$ den Radius des durch die schneidende Ebene DmC erzeugten Kreises abgibt. Nimmt man folglich das obige Integral $x = -A$ bis $x = +A$, so erhält man das unendlich schmale Flächenstück DmC eines zur Ebene xz parallelen und auf der obern Halbkugel befindlichen Streifens. Indem wir also $x = -A$ und $x = +A$ hier oben setzen und das erste Resultat vom zweiten abziehen, bekommen wir $\pi r dy$, weil der Bogen, dessen Sinus die Einheit beträgt, gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist. Das in Bezug auf y gewonnene Integral $\pi r y$, welches zwischen den Grenzen $-r$ und $+r$, die dem kleinsten und größten Werthe von y entsprechen, zu nehmen ist, liefert uns dann $2\pi r^2$ als Ausdruck für die Oberfläche der einen Halbkugel, wie es auch die Elementargeometrie lehrt.

Für das Volumen V der Kugel hat man:

$$V = \iint dx dy \sqrt{(A^2-x^2)}$$

Sieht man zunächst y als constant an, so findet man:

$$\int \sqrt{(A^2-x^2)}\, dx = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(A^2-x^2)} + \tfrac{1}{2} A^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{A}\right)$$

Hieraus entspringt, wenn man das Integral, wie oben, zwischen den Grenzen $-A$ und $+A$ nimmt, das Resultat $\frac{1}{2}\pi A^2$, so daß man von Neuem den Ausdruck $\frac{1}{2}\pi(r^2-y^2)dy$, welcher das Volumen des Körperstücks $DmCE$ darstellt, zu integriren hat. Das Integral davon ist $\frac{1}{2}\pi(r^2y-\frac{1}{3}y^3)$ und gibt, von $y=-r$ bis $y=+r$ genommen, $\frac{2}{3}\pi r^3$ zum kubischen Inhalt der Halbkugel.

§. 169. Der Inhalt eines Körpers wird, beim Gebrauch rechtwinkliger Coordinatenachsen, dadurch gefunden, daß man ihn durch drei Reihen unendlich vieler nahe an einander liegender, mit

den Coordinatenebenen paralleler Ebenen in lauter unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegt, deren jedes den kubischen Inhalt $= dxdydz$ hat. Integrirt man hierauf zuerst in Bezug auf z und zwar von dem z, das der obern Begrenzungsfläche des Körpers bis zu jenem z, das seiner untern Grenzfläche entspricht, d. h. setzt man in den Ausdruck $zdxdy$ statt z die beiden Werthe, wie sie sich aus den Gleichungen jener zwei Flächen ergeben; so erhält man den Inhalt der von denselben eingeschlossenen und über der Basis $dxdy$ construirten Latte. Das hierauf in Bezug auf x gewonnene Integral ist der Ausdruck für die Summe aller Latten, welche die Scheibe bilden, die zwischen den beiden zu $y=y$ und $y=y+dy$ gehörigen, auf der Achse der y senkrecht stehenden Schnitten liegt. Integrirt man zuletzt in Bezug auf y, so bekommt man in der Summe aller der vorhergehenden analogen Scheiben den Inhalt des Körpers, so weit man ihn haben will.

Ist der fragliche Körper von der convexen Oberfläche eines Cylinders MNg (Fig. 51) begrenzt, welcher über der gegebenen Curve mng auf der Ebene xy senkrecht steht, so nimmt man das zweite Integral $\int zdx$, damit der Ausdruck $dy\int zdx$ derjenige des Abschnitts $MM'N'Nmm'n'n$ werde, von $x = Pm$ bis $x = Pn$, wo die letztern Linien vermöge der Gleichung der Curve mfng in Funktionen von y gegeben sind. Bezeichnet man diese Funktionen mit fy und Fy, so muß man sie successiv statt x in das Integral setzen und das eine Resultat vom andern abziehen. Es bleibt dann nichts weiter übrig, als eine bloße Funktion von y zu integriren, wobei, um den ganzen Inhalt des fraglichen Körpers zu erhalten, man das Integral von dem kleinsten Werthe von y, AB, bis zu seinem größten AC zu nehmen hat, welche Werthe übrigens die Gleichung der Curve darbietet.

Beispiele: 1. Man soll das Volumen eines geraden Kegels finden. Wählt man die Achse des Kegels zur Achse der y und den Scheitel desselben zum Ursprung, so ist die Gleichung des Kegels $l^2y^2=z^2+x^2$, wo l die Tangente des Winkels bezeichnet, welchen die Achse mit den Erzeugungslinien bildet. Der Ausdruck $zdxdy$ verwandelt sich aber in $2\sqrt{(l^2y^2-x^2)}\,dxdy$, wenn man von dem untern bis zum obern z integrirt und erwägt, daß $z=\pm\sqrt{(l^2y^2-x^2)}$.

Das Integral davon in Bezug auf x ist:

$$x\sqrt{(l^2y^2-x^2)}+2l^2y^2\,\mathrm{arc}\left[\mathrm{tg}=\sqrt{\left(\frac{ly+x}{ly-x}\right)}\right]+C.$$

Da für $z=0$ die Gleichung des Kegels uns $x=\pm ly$ als Grenzen des Körpers liefert; so muß man hier x mit $-ly$, was Null gibt, ferner x mit $+ly$ vertauschen, woraus $2l^2y^2\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=\frac{1}{0})=\pi l^2y^2$ entsteht. Man hat jetzt noch den Ausdruck πl^2y^2dy von $y=0$, dem Scheitel an, bis $y=h$, was der Basis entspricht, zu integriren; man bekommt dadurch für den Inhalt des ganzen Kegels den Werth $\frac{1}{3}\pi l^2h^3$, welcher mit dem aus der Elementargeometrie bekannten Resultate übereinstimmt.

2. Es soll der Inhalt des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ gesucht werden. Die beiden Grenzwerthe von z sind $z=\pm c\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}$; mithin $\iint z\,dy\,dx=2c\iint\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy$. Es ist aber $2c\int\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}dy$, wenn man x als constant ansieht:

$$=cy\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}-bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{arc}\left(\cos=1-\frac{ay}{b\sqrt{(a^2-x^2)}}\right).$$

Nimmt man dies Integral von:

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} \text{ bis } y=-\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)},$$

welche Werthe aus der Gleichung des Ellipsoids für $z=0$ hervorgehen; so findet man das Resultat

$$bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), \text{ weil } \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

an beiden Grenzen verschwindet und der Bogen dabei einmal $-\frac{1}{2}\pi$ und das anderemal $+\frac{1}{2}\pi$ wird. Integrirt man endlich den Ausdruck $bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$ wo $x=a$ bis $x=-a$, so findet man für den Inhalt des ganzen Ellipsoids den Ausdruck $\frac{4}{3}abc\pi$.

§. 170. Werden auf ähnliche Weise die Grenzen des Flächeninhalts durch eine auf der in Frage stehenden gekrümmten Oberfläche verzeichneten Curve FMNG (Fig. 51) bestimmt, so sucht man die Projection fg der letztern auf der Ebene xy, wodurch ein

gerader Cylinder entsteht, für welchen man genau dasselbe Raisonnement, wie vorhin, vorstellt.

Beispiele: 1. In der Ebene xy seien die zwei gleichen, entgegengesetzt liegenden Parabeln FAE, F′AE′ (Fig. 47), deren Gleichungen $y^2=nx$, $y^2=-nx$ sind, verzeichnet; ferner sei in dem Abstande $AC=b$ vom Ursprung die Linie FF′ parallel zur Achse der x gezogen. Wenn man sich nun einen geraden Kegel mit kreisförmiger Basis vorstellt, dessen Scheitel im Ursprung A und dessen Achse in der Achse der z liegt, der mithin $z=k\sqrt{(x^2+y^2)}$ zur Gleichung hat; so handelt es sich darum, das von diesem Kegel und dem auf der Basis AMFF′M′ senkrecht errichteten Cylinder eingeschlossene Flächenstück zu finden. Die Gleichung des Kegels gibt:

$$p=\frac{kx}{\sqrt{(x^2+y^2)}},\quad q=\frac{ky}{\sqrt{(x^2+y^2)}},\quad 1+p^2+q^2=1+k^2,$$

wonach für das Element der Kegelfläche $\sqrt{(1+k^2)}dxdy$ entspringt, dessen Projection in m ist. Das Integral in Bezug auf x ist $\sqrt{(1+k^2)}xdy$, was man von M′ bis M nehmen muß, um den Flächeninhalt des unendlich schmalen Streifens, der seine Projection in MM′ hat, zu bekommen. Die Gleichungen unserer Parabeln liefern aber für die Abscissen der Punkte M′ und M, als Grenzen des Integrals, $x=-\frac{y^2}{n}$, $x=+\frac{y^2}{n}$, woraus $\frac{2y^2}{n}\sqrt{(1+k^2)}\,dy$ entspringt. Integrirt man den letzten Ausdruck, so kommt $\frac{2y^3}{3n}\sqrt{(1+k^2)}$, was man von A bis C, d. h. von $y=0$ bis $y=b$ nehmen muß; man findet hiernach für die verlangte Fläche den Werth $\frac{2b^3}{3n}\sqrt{(1+k^2)}$.

2. Die Mantelfläche eines Kegels, dessen Achse in der Achse der z und dessen kreisförmige Basis in der Ebene xy liegt, zu finden; die Gleichung des Kegels ist $a^2(b-z)^2=b^2(x^2+y^2)$, wenn b seine Höhe und a den Halbmesser der Basis bedeutet, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Hieraus ergibt sich $U=\iint\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}dx\,dy$.

Integrirt man zuerst in Bezug auf y von $y=0$ bis:

$y=\sqrt{(a^2-x^2)}$, so kommt:

$U=\frac{1}{a}\sqrt{(a^2+b^2)}\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, oder, wenn man integrirt:

$$U=\frac{1}{2}a\sqrt{(a^2+b^2)}\left[x\sqrt{(a^2-x^2)}+a^2\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)\right],$$

wo U mit x verschwindet. Diese Formel gibt sofort denjenigen Theil der Kegelfläche, der von zwei parallelen, auf der Achse der x senkrechten Ebenen begrenzt wird, von denen die eine die Ebene yz selbst ist und die andere um die Größe x von ihr absteht. Wird das Integral bis $x = a$ ausgedehnt, so hat man offenbar den vierten Theil der Mantelfläche $= \frac{a\pi}{4}\sqrt{(a^2+b^2)}$.

Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der neuesten verbesserten und vermehrten Pariser Original-Ausgabe aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. Edmund Külp,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Zweiten Bandes drittes Buch,

enthaltend

die Differential- und Integralrechnung.

Bern, Chur und Leipzig,

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1843.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Inhalt.

Zweiten Bandes drittes Buch, zweite Abtheilung.

(Die Differential- und Integralrechnung [Schluß].)

Fünftes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen.

Seite.

Fünftes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen.

Von der Trennung der Veränderlichen und den homogenen Gleichungen.

§. 171. Wir wollen uns jetzt mit den Differentialgleichungen von zwei Veränderlichen beschäftigen, d. h. mit denjenigen Ausdrücken, in welchen die Veränderlichen x und y mit ihren Differentialen dx, dy untereinander gemischt stehen. In der ersten Ordnung hat eine solche Differentialgleichung, insofern sie nur vom ersten Grade in Bezug auf dx und dy ist, nothwendig folgende Form: $Mdy+Ndx=0$. Ist diese Gleichung dergestalt beschaffen, daß M bloß eine Funktion von y und N eine Funktion von x ist; so hat man die ursprüngliche Gleichung $\int Mdy+\int Ndx=C$, wobei die Integrale $\int Mdy$ und $\int Ndx$ nach den für die einfachern Formeln oben aufgestellten Vorschriften zu behandeln sind. Dasselbe findet bei jeder Differentialgleichung statt, sobald man durch irgend ein Verfahren dahin gelangt ist, die Veränderlichen in ihr zu trennen.

§. 172. Sehr leicht läßt sich die Absonderung der Veränderlichen in dem Falle bewirken, wo M bloß x und N bloß y enthält, weil man durch die Division mit MN hat:

$$\frac{dy}{N}+\frac{dx}{M}=0.$$

Auf ähnliche Weise bewerkstelligt man die Trennung der Veränderlichen bei der Gleichung $XYdy+X_1Y_1dx=0$, wo X und X_1 Funktionen von x, Y und Y_1 Funktionen von y sind; denn durch die Division mit XY_1 bekommt man sofort die gesonderte Gleichung:

$$\frac{Y}{Y_1}dy+\frac{X_1}{X}dx=0.$$

Beispiele: 1. $dx\sqrt{(1+y^2)}-xdy=0$ liefert $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}}$; woraus: $l(cx)=l[y+\sqrt{(1+y^2)}]$ oder $cx=y+\sqrt{(1+y^2)}$, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht.

2. $x^3ydx+(2y-1)xdy=0$ verwandelt sich in $x^2dx+\frac{2y-1}{y}dy=0$.

Durch Integration entsteht dann $\frac{x^3}{3}+2y-ly=C$.

§. 173. Bei den homogenen Differentialgleichungen, d. h. bei denjenigen, in welchen die Summe der Exponenten der Veränderlichen x und y in jedem Gliede dieselbe ist, läßt sich die Sonderung derselben immer ausführen. Denn ist m jene Summe der Exponenten, so verwandelt sich das beliebige Glied Ay^kx^h, wenn man das Ganze durch x^m dividirt und $y=xz$ macht, in Az^k, weil $h+k=m$ sein soll. Im vorliegenden Falle werden sich demnach M und N auf bloße Funktionen von z reduciren, so daß die Gleichung $Mdy+Ndx$, wenn durch M dividirt wird, die Form $dy+Zdx=0$ erhält. Aus $y=xz$ entsteht aber $dy=xdz+zdx$; durch Substitution dieses Werthes bekommt man:

$$xdz+(z+Z)dx=0 \text{ oder } \frac{dx}{x}+\frac{dz}{z+Z}=0.$$

Integrirt man endlich, so hat man:

$$lx+\int\frac{dz}{z+Z}=C.$$

Anmerkung. Ließe sich hier das Integral $\int\frac{dz}{z+Z}$ auch durch Logarithmen darstellen, so erhielte man eine algebraische Gleichung zwischen x und y.

Beispiele: 1. Für $ydy+(x+2y)dx=0$ bekommt man durch die erwähnte Transformation:

$$\frac{dx}{x}+\frac{zdz}{z^2+2z+1}=0=\frac{dx}{x}+\frac{dz}{1+z}-\frac{dz}{(1+z)^2}$$

Hieraus entspringt durch Integration:

$$l(cx)+l(1+z)+\frac{1}{1+z}=0,$$

oder wenn man z durch seinen Werth $\frac{y}{x}$ ersetzt,

$$lc(x+y)+\frac{x}{x+y}=0.$$

2. Für $x^2dy=(x^2-y^2)\,dx$ erhält man:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{1-z-z^2} \text{ und } lx=\int\frac{dz}{1-z-z^2},$$

bei welcher Integration wir uns nicht weiter aufhalten wollen.

3. Für $xdy-ydx=dx\sqrt{(x^2+y^2)}$ findet man $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}}$. Durch Integration bekommt man $x=cz+c\sqrt{(1+z^2)}$, oder, wenn man statt z seinen Werth $\frac{y}{x}$ einführt und das Wurzelzeichen zum Verschwinden bringt: $x^2=2cy+c^2$.

4. Die Curve anzugeben, deren Flächeninhalt BCMP (Fig. 7) von einer bestimmten Ordinate BC an gerechnet, gleich dem Kubus der begrenzenden Ordinate PM dividirt durch die Abscisse ist.

Aus $\int ydx=\frac{y^3}{x}$ erhält man durch Differentiation (x^2y+y^3) $dx=3xy^2dy$. Macht man $y=zx$, so findet man $\frac{dx}{x}=\frac{3zdz}{1-2z^2}$, welches gibt: $x^4(1-2z^2)^3=c$ oder $(x^2-2y^2)^3=cx^2$.

§. 174. Jede Gleichung, welche durch irgend ein Mittel homogen gemacht werden kann, läßt sich nach derselben Methode behandeln.

Hierher gehört die Gleichung:

$(ax+by+c)dy+(mx+ny+p)dx=0$. Man setze

$ax+by+c=z$, $mx+ny+p=t$; hieraus erhält man:

$adx+bdy=dz$, $mdx+ndy=dt$; ferner

$$dy=\frac{mdz-adt}{mb-na},\ dx=\frac{bdt-ndz}{mb-na};$$

wonach folgende in Bezug auf t und z homogene Differentialgleichung:

$$(mz-nt)dz+(bt-az)dt=0$$

zum Vorschein kommt.

Die vorhergehende Transformation führt zu keinem Resultate, wenn $mb-na=0$; man hat aber alsdann $m=\frac{na}{b}$, wodurch die gegebene Gleichung sich in:

$$bcdy+bpdx+(ax+by)(bdy+ndx)=0$$

verwandelt, wo es hinreicht $ax+by=z$ zu machen, um in ihr die Veränderlichen abzusondern. Substituirt man nämlich dieses z und den aus der angesetzten Gleichung sich ergebenden Werth von $dy=\frac{dz-adx}{b}$, und isolirt dx; so findet man $dx+\frac{(z+c)dz}{bp-ac+z(n-a)}=0$.

Anmerkung. Die Integration dieses Ausdrucks führt auf Logarithmen, wenn nicht $n-a=0$ ist, in welchem Falle das Integral algebraisch wird.

§. 175. Die Trennung der Veränderlichen läßt sich auf eine sinnreiche Weise bei der Gleichung:

$$dy+Pydx=Qdx$$

erreichen, wenn P und Q Funktionen von x sind. Denn macht man $y=zt$, so geht unsere Gleichung in:

$$zdt+tdz+Pztdx=Qdx$$

über, worin die Absonderung auf der Stelle erfolgt, wenn man den Coefficienten von $z=0$ setzt, was hier ohne Weiteres geschehen kann, indem z und t als Funktionen von x angenommen sind, von denen eine offenbar willkührlich ist. Man hat demnach:

$$dt+Ptdx=0,\ tdz=Qdx.$$

Die erste gibt $\frac{dt}{t}=-Pdx$, woraus entspringt $lt=-\int Pdx$. Da in Pdx kein y vorkommt, so läßt sich das Integral $\int Pdx$ nach den bekannten Methoden behandeln. Dasselbe durch u darstellend, haben wir: $lt=-u+a$, oder $t=e^{-u+a}=e^{a}\cdot e^{-u}$.

Indem wir in die zweite Gleichung $tdz=Qdx$ den eben gefundenen Werth von t substituiren, bekommen wir:

$$e^{a}\,dz=Qe^{u}\,dx;\ \text{hieraus}\ e^{a}\,z=\int Qe^{u}\,dx+c,$$

wo u und Q bekannte Funktionen von x sind. Setzt man in dem gewonnenen Integral $\int Qe^{u}\,dx$ für z seinen Werth $\frac{y}{t}$ oder ye^{u-a},

so ergibt sich für das gesuchte Integral der Ausdruck:

$$ye^u = \int Qe^u\,dx + c.$$

Um zu der ursprünglichen Gleichung von $Pydx+dy=Qdx$ zu gelangen, ist demnach eine doppelte Integration vorzunehmen; denn einmal hat man das Integral $\int Pdx$ und das anderemal das Integral $\int e^{\int Pdx}Qdx$ zu bestimmen. Auch sieht man, daß es unnöthig ist, dem ersten Integral eine Constante a hinzuzufügen, weil der Werth von y nur eine einzige besitzt.

Anmerkung. Die hier behandelte Differentialgleichung

$$dy + Pydx = Qdx,$$

in welcher y und sein Differential dy nur auf der ersten Potenz erscheinen, wird gewöhnlich linearische Gleichung der ersten Ordnung genannt. Passender wäre es aber, einen derartigen Ausdruck schlechtweg Gleichung vom ersten Grade und von der ersten Ordnung zu nennen.

Beispiele: 1. Man soll die Differentialgleichung:

$dy + ydx = ax^3dx$ integriren. Man hat hier:

$P=1,\ Q=ax^3,\ u=x,\ \int Qe^u dx = ae^x(x^3-3x^2+6x-6)$;

folglich das gesuchte Integral:

$$y = ce^{-x} + a(x^3-3x^2+6x-6).$$

2. Für die Gleichung $(1+x^2)dy - yxdx = adx$ ist:

$$P = \frac{-x}{1+x^2},\ Q = \frac{a}{1+x^2},\ u = -\int\frac{xdx}{1+x^2} = -l\sqrt{(1+x^2)};\ \text{ferner:}$$

$$e^u = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}};\ \int Qe^u dx = \int\frac{adx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ax}{\sqrt{(1+x^2)}} + c.$$

Daher das gesuchte Integral $y = ax + c\sqrt{(1+x^2)}$.

§. 176. Wir wollen uns jetzt mit der Gleichung:

$$dy + by^2dx = ax^m dx$$

beschäftigen, welche von dem italienischen Grafen Riccati zuerst behandelt wurde und nach demselben benannt wird:

1. Ist in dieser Gleichung $m=0$, so findet die Absonderung sofort statt, indem man dann hat:

$$dx = \frac{dy}{a - by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{dy}{\sqrt{a}+y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}\right);$$

woraus durch Integration entspringt:

$$2x\sqrt{(ab)}+c = l\,\frac{\sqrt{a}+y\sqrt{b}}{\sqrt{a}-y\sqrt{b}}.$$

2. Ist m nicht Null, so setze man $y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2}$; hieraus erfolgt:

$$x^2dz + bz^2dx = ax^{m+4}dx.$$

Die gegebene Differentialgleichung wird daher in eine homogene transformirt worden sein, wenn $m = -2$ ist. Ueberdem wäre die transformirte Gleichung absonderungsfähig, wenn man $m = -4$ hätte, weil man in diesem Falle $\frac{dz}{bz^2 - a} + \frac{dx}{x^2} = 0$ erhielte.

3. Findet keines von Beiden statt, so mache man $z = \frac{1}{y'}$, $x^{m+3} = x'$; ferner, um abzukürzen:

$$m' = -\frac{m+4}{m+3},\quad b' = \frac{a}{m+3},\quad a' = \frac{b}{m+3}:$$

man gelangt hierdurch zu der Gleichung:

$$dy' + b'y'^2dx' = a'x'^{m'}dx',$$

welche der gegebenen ähnlich ist, mithin dieselben Umwandlungen zuläßt; die Trennung der Veränderlichen x' und y' wird daher nach der Substitution von $y' = \frac{1}{b'x'} + \frac{z'}{x'^2}$ möglich sein, wenn $m' = -4$. Fände diese Bedingung nicht statt, so würde man wieder:

$$z' = \frac{1}{y''},\quad x'^{m'+3} = x'',\ \text{desgleichen:}$$

$$\frac{a'}{m'+3} = b'',\quad \frac{b'}{m'+3} = a'',\quad -\frac{m'+4}{m'+3} = m''$$

setzen, was uns die Gleichung:

$$dy'' + b''y''^2dx'' = a''x''^{m''}dx''$$

lieferte, welche wiederum der vorgelegten ganz ähnlich, mithin absonderungsfähig ist, wenn $m'' = -4$. Fährt man auf diese Weise fort, so findet man, daß sich die Riccatische Gleichung jederzeit sondern läßt, wenn in der Reihe der Exponenten:

$$m,\ m' = -\frac{m+4}{m+3},\ m'' = -\frac{m'+4}{m'+3},\ m''' = -\frac{m''+4}{m''+3}\ldots$$

einer vorkommt, welcher -4 gleich ist, d. h. sie läßt sich sondern für

$$m = -4, -\tfrac{8}{3}, -\tfrac{12}{5}, -\tfrac{16}{7} \text{ etc.},$$

oder überhaupt für $m = -\frac{4i}{2i-1}$, wo i jede positive Zahl bedeutet.

4. Macht man in der Riccatischen Gleichung $dy + by^2dx = ax^mdx$:

$$y = \frac{1}{y'},\ x^{m+1} = x' \text{ und setzt der Kürze wegen:}$$

$\frac{a}{m+1} = b'$, $\frac{b}{m+1} = a'$, $-\frac{m}{m+1} = m'$; so erfolgt die Gleichung:

$$dy' + b'y'^2dx' = a'x'^{m'}dx',$$

welche, da sie der vorgelegten ganz ähnlich ist, auch dieselben Operationen zuläßt. Man gelangt daher zu einer trennbaren Transformirten, wenn:

$$m' = -\frac{4i}{2i-1} \text{ oder } -\frac{m}{m+1} = -\frac{4i}{2i-1}\text{; woraus man zieht:}$$

$$m = -\frac{4i}{2i+1}.$$

Faßt man alles Vorhergehende zusammen, so sieht man, daß die Riccatische Gleichung stets integrabel wird, wenn $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$ ist, wo i jede positive ganze Zahl, 0 und $\frac{1}{0}$ mit eingeschlossen, bedeutet, indem der erste dieser beiden letzten Fälle dem Werthe $m = 0$ und der zweite dem Werthe $m = -2$ entspricht.

Anmerkung. Man gelangt zu der oben angeführten allgemeinen Form von $m = -\frac{4i}{2i-1}$, wenn man die Größen $m', m'' \ldots$ durch m ausdrückt. Denn indem man den Werth von m' in den von m'', hierauf das Resultat in den Werth von m''' u. s. w. einführt; erhält man:

$$m' = -\frac{m+4}{m+3},\ m'' = -\frac{3m+8}{2m+5},\ m''' = -\frac{5m+12}{3m+7} \text{ etc.},$$

woraus man die Formel:

$$m^{(i)} = -\frac{(2i-1)m+4i}{im+2i+1}$$

zieht, deren Richtigkeit durch die Relation:

$$m^{(i+1)} = -\frac{m^{(i)}+4}{m^{(i)}+3} = -\frac{[2(i+1)-1]m+4(i+1)}{(i+1)m+2(i+1)+1}$$

bestätigt wird.

Die gegebene Gleichung ist aber integrabel, wenn der Exponent von x auf der zweiten Seite verschwindet; macht man daher $m^{(i)}=0$, so findet man $m=-\frac{4i}{2i-1}$. Macht man $m^{(i)}=-4$, so bekommt man, $m=-\frac{4(i+1)}{2(i+1)-1}$, was darauf hinausläuft, $m^{(i+1)}=0$ zu setzen.

Von dem integrirbar machenden Faktor.

§. 177. Man muß sich erinnern, daß eine Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ nicht immer das unmittelbare Resultat der Differentiation einer Gleichung $f(x,y)=0$ ist, sondern daß sie auch dadurch entstanden sein kann, daß man die durch Differentiiren gewonnene Gleichung mit irgend einem Faktor multiplicirt oder dividirt, oder eine Constante zwischen der primitiven Gleichung und ihrem Differential eliminirt, oder irgend eine andere Verbindung mit denselben vorgenommen hat. Es kann sich daher ereignen, daß eine vorgelegte Gleichung kein genaues Differential, mithin auch nicht geradezu integrabel ist. Um einen Charakter für die Integrabilität der Gleichungen zu erhalten, sei $u=f(x,y)$ die ursprüngliche Gleichung, deren Differential $du=Mdy+Ndx$ ist. Die bekannte Relation $\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}$ verwandelt sich hier in:

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dN}{dy} \quad \ldots (1).$$

Soll daher der Ausdruck $Mdy+Ndx$ ein vollständiges Differential einer Funktion zweier Veränderlichen x und y sein, so muß derselbe der Relation (1) Genüge leisten. Und umgekehrt, erfüllen M und N diese Bedingungsgleichung; so ist $Mdy+Ndx$ ein genaues Differential, das jederzeit integrirt werden kann. Um das Letztere nachzuweisen, integriren wir zunächst Mdy, indem x als constant angesehen wird. Bezeichnen wir $\int Mdy$ durch P, wo P eine bekannte Funktion von x und y bedeutet; so haben wir $u=P+X$: es stellt hier X eine Funktion von x dar, weil die Integration sich nur auf die Veränderliche y bezog. Wir wollen jetzt zeigen, daß $P+X$ wirklich das Integral von $Mdy+Ndx$ ist, insofern die Bedingung (1) erfüllt wird.

Das totale Differential von P+X ist nun:

$$\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + dX \text{ oder } \frac{dP}{dx}dx + Mdy + dX,$$

weil $\frac{dP}{dy} = M$; woraus man schließen muß, daß P+X das Integral des Ausdruckes Mdy+Ndx ist, der mithin ein vollständiges Differential darstellt, wenn sich X dergestalt bestimmen läßt, daß das vorstehende Trinom gleich

$$Mdy + Ndx, \text{ oder } dX = \left(N - \frac{dP}{dx}\right)dx \ldots (2)$$

werde. Differentiirt man aber $M = \frac{dP}{dy}$ in Bezug auf x, so findet man wegen der vorausgesetzten Bedingung (1) die Relation:

$$\frac{dN}{dy} - \frac{d^2P}{dydx} = 0 \text{ oder } 0 = \frac{d\left(N - \frac{dP}{dx}\right)}{dy}, \text{ d. h. } N - \frac{dP}{dx}$$

ist eine bloße Funktion von x. Das gesuchte Integral ist folglich P+X, wo P das Integral von Mdy in Bezug auf y allein darstellt und X das Integral der durch die Relation (2) bestimmten Funktion von x ist. Die Richtigkeit unserer Behauptung wäre demnach durch das mit Mdy+Ndx angestellte Integrationsverfahren sofort nachgewiesen. Uebrigens hätte man auch, wie man leicht sieht, zuerst Ndx in Bezug auf x integriren können, wobei y als constant angesehen wird, und das Integral $\int Ndx$ durch eine Funktion von y zu ergänzen ist. Von den bezeichneten Wegen wird man denjenigen einschlagen, welcher bei der Rechnung die wenigsten Schwierigkeiten darbietet.

Anmerkung. Die Differentialgleichungen, in welchen die Variabeln getrennt erscheinen, haben die Form Xdx+Ydy=0, wo X bloß eine Funktion von x und Y bloß eine Funktion von y ist. Man erhält daher $\frac{dX}{dy} = 0$ und $\frac{dY}{dx} = 0$; woraus erhellet, daß die abgesonderten Gleichungen gleichsam die erste Gattung der für sich integrabeln Gleichungen bilden.

§. 178. Nachstehende Beispiele von integrabeln Gleichungen werden diese Integrationsmethode deutlich machen.

1. Es sei $\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} + adx + 2bydy = 0$ zu integriren.

Man hat hier $M=2by$, $N=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}+a$, wonach sich die Integrabilität von selbst ergibt. Man findet $P=by^2$, mithin ist by^2+X das gesuchte Integral. Das Differential des letztern in Bezug auf x mit Ndx verglichen, liefert:

$$dX=\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}+adx, \text{ woraus } X=ax+lc[x+\sqrt{(1+x^2)}];$$

folglich ist das gesuchte Integral:

$$by^2+ax+lc[x+\sqrt{(1+x^2)}]=0.$$

2. Für $\frac{a(xdx+ydy)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}+\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+3by^2dy=0$ hat man:

$$M=\frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}}-\frac{x}{x^2+y^2}+3by^2,$$

$$N=\frac{ax}{\sqrt{({}^2+y^2)}}+\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Da die Bedingungsgleichung (1) erfüllt wird, so kann die gegebene Funktion unmittelbar integrirt werden. Zuerst erhält man:

$$\int Ndx=a\sqrt{(x^2+y^2)}+\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{x}{y}\right)+Y.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck in Bezug auf y und vergleicht das Resultat mit Mdy, so hat man $dY=3by^2dy$, weshalb $Y=by^3+C$. Das Integral wäre demnach vollständig gefunden.

Macht man $a=b=0$, so bekommt man:

$$\int\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{x}{y}\right)+C,$$

eine Integration, welche La Place bei dem Beweise des Satzes über die Zusammensetzung der Kräfte in seiner Mechanik des Himmels benutzt hat.

3. Man findet ebenso:

$$\int\frac{dx[x+\sqrt{(x^2+y^2)}]+ydy}{[x+\sqrt{(x^2+y^2)}]\sqrt{(x^2+y^2)}}=lc[x+\sqrt{(x^2+y^2)}].$$

4. $$\int\left(\frac{dx}{x}+\frac{y^2dx}{x^3}-\frac{ydy}{x^2}+\frac{(ydx-xdy)\sqrt{(x^2+y^2)}}{x^3}+\frac{dy}{2y}\right)$$

$$=lx-\frac{y^2}{2x^2}-\frac{y\sqrt{(x^2+y^2)}}{2x^2}+\frac{1}{2}l\left(\frac{-y^2+y\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}\right)+C.$$

§. 179. Bei dem im §. 177 angestellten Verfahren sieht man, daß man zuweilen mit dem Integralzeichen $\int$ behaftete Funktionen $u=\int N dx$ bekommen kann, welche man in Bezug auf eine andere Veränderliche y differentiiren soll, als auf welche sich das Integral bezieht: die Differentiation wird in solchem Falle ohne weiteres unter dem Integralzeichen $\int$ vorgenommen. Man hat in der That:

$$\frac{du}{dx}=N, \text{ ferner } \frac{d^2u}{dydx}=\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{dN}{dy};$$

woraus, wenn man jede Seite dieser letztern Gleichung in Bezug auf x integrirt:

$$\frac{du}{dy}=\int\frac{dN}{dy}dx.$$

§. 180. Genügt die Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ der Integrabilitätsbedingung (1) nicht, so kann sie immer durch einen schicklichen Multiplikator zu einem genauen Differential gemacht werden, wenn sie einer ursprünglichen Gleichung entspricht. Ein solcher Multiplikator, mit welchem man eine unvollständige Differentialgleichung multipliciren muß, um sie integrabel zu machen, und welcher im Allgemeinen eine Funktion von x und y ist, heißt integrirender Faktor. Es sei nämlich $f(x, y, c)=0$ oder $c=\varphi(x, y)$ jene Grundgleichung der gegebenen Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ oder von $y'+K=0$.

Aus der Derivirten $\varphi'=Py'+Q=0$ von $c=\varphi(x, y)$ entspringt aber der Ausdruck $y'+\frac{Q}{P}=0$, welcher, da in ihm die Constante nicht mehr vorkommt, mit der vorgelegten Differentialgleichung übereinstimmen muß, d. h. es ist:

$$y'+K=\frac{Py'+Q}{P}, \text{ oder } \varphi'=P(y'+K).$$

Allein φ' ist ein genaues Differential, mithin muß auch $P(y'+K)$ ein solches sein, oder mit andern Worten, es existirt ein Faktor P, der geeignet ist, die Funktion $y'+K$ oder die beliebige Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ von der ersten Ordnung zum genauen Differential zu machen.

§. 181. Um diesen integrirenden Faktor, der durch z dargestellt sein mag, zu bestimmen, hat man die Relation:

$$\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy},$$

welcher die Gleichung $Mzdy+Nzdx=0$ genügen muß, wenn sie ein genaues Differential sein soll. Entwickelt man jene Bedingungsgleichung, so findet man:

$$z\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)=N\frac{dz}{dy}-M\frac{dz}{dx} \quad . . (3).$$

Könnte man aus dieser Gleichung den Werth von z in x und y bestimmen, so wäre man im Stande, jede Differentialgleichung von der ersten Ordnung zu integriren; allein meistens ist jene Gleichung schwieriger zu behandeln als die gegebene Differentialgleichung selbst, weil darin die Funktion z von zwei Veränderlichen x und y und von zwei partiellen Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ abhängt. Uebrigens lassen sich aus der Relation (3) mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften herleiten.

1. Der Faktor z ließe sich, wenn das Integral u der vorgelegten Differentialgleichung bekannt wäre, aus den Gleichungen:

$$\frac{du}{dx}=Nz \text{ und } \frac{du}{dy}=Mz \text{ bestimmen.}$$

2. Wird die Gleichung $du=z(Mdy+Ndx)$ mit einer beliebigen Funktion von u, welche wir mit φu bezeichnen wollen, multiplicirt; so haben wir:

$$\varphi u \cdot du=z\cdot\varphi u(Mdy+Ndx).$$

Da das erste Glied ein genaues Differential ist, so wird es auch das zweite sein; hieraus folgt, daß, wenn man einen integrirenden Faktor z von einem beliebigen Differential von x und y kennt, man aus diesem Faktor eine unendliche Anzahl anderer herleiten kann, welche dieselbe Eigenschaft besitzen.

3. Wäre z bloß eine Funktion von x, so geht die Gleichung (3) in:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{M}\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}\right) \quad . . . (4)$$

über, weil $\frac{dz}{dy}=0$. Bezeichnet man die Funktion von x, auf welche sich der zweite Theil der Relation (4) reduciren muß, mit X; so hat man $z=e^{\int Xdx}$.

4. Würde z bloß y enthalten, so findet man:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{N}\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right) \quad . . . (5);$$

woraus, wenn der von x unabhängige Faktor von dy mit Y bezeichnet wird, $z=e^{\int Ydy}$.

5. Die Gleichungen (4) und (5) werden zugleich als Merkmal dienen, ob der integrirende Faktor z eine Funktion von x oder y sein kann.

6. Der in den Gleichungen (4) und (5) innerhalb der Parenthesen befindliche Ausdruck verschwindet, wenn $Mdy+Ndx$ ein genaues Differential ist.

Anmerkung. Es läßt sich auch umgekehrt nachweisen, daß, wenn

$$\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}\right)=X$$

eine bloße Funktion von x ist, jederzeit $z=e^{\int Xdx}$ ein integrirender Faktor von $Mdy+Ndx$ ist. Man hat nämlich:

$\frac{d(Ne^{\int Xdx})}{dy}=e^{\int Xdx}.\frac{dN}{dy}$, weil $\frac{d\int Xdx}{dy}=0$; ferner:

$\frac{d(Me^{\int Xdx})}{dx}=e^{\int Xdx}\frac{dM}{dx}+MXe^{\int Xdx}$. Nun ist, wegen:

$\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}\right)=X$, $\frac{dN}{dy}=\frac{dM}{dx}+MX$; folglich;

$MXe^{\int Xdx}+e^{\int Xdx}.\frac{dM}{dx}=\frac{dN}{dy}e^{\int Xdx}$, d. h.:

$\frac{d(Me^{\int Xdx})}{dx}=\frac{d(Ne^{\int Xdx})}{dy}$; woraus folgt, daß:

$Me^{\int Xdx}dy+Ne^{\int Xdx}dx$

ein genaues Differential von x und y ist.

Ganz auf dieselbe Art wird nachgewiesen, daß, wenn:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dN}{dy}\right)=Y$$

eine bloße Funktion von y ist, jederzeit $z=e^{\int Ydy}$ einen integrirenden Faktor von $Mdy+Ndx$ abgibt.

Beispiele: 1. Für die schon behandelte lineäre Gleichung $dy+Pydx=Qdx$ hat man $M=1$, $N=Py-Q$, $\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dx}\right)=P$; woraus folgt, weil Q und P kein y enthalten, $z=e^{\int Pdx}=e^u$. Multiplicirt man hierauf die gegebene Gleichung mit e^u, so bekommt man:

$$e^u dy+e^u(Py-Q)dx=0.$$

Indem man $e^u\,dy$ in Bezug auf y integrirt, erhält man $e^u\,y+X$, wo X eine Funktion von x bedeutet, welche durch die Gleichung:

$$\frac{d\cdot e^u\,y}{dx}+\frac{dX}{dx}=e^u\,(Py-Q)$$

bestimmt wird; woraus $X=-\int e^u\,Qdx$ entsteht.

Folglich das gesuchte Integral:

$$y\,e^{\int Pdx}-\int e^{\int Pdx}Qdx=C.$$

2. $x^3dy+\left(4x^2y-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)dx=0$ liefert $lz=lx$;

man muß demnach das vorgelegte Differential mit x multipliciren, um es integrabel zu machen.

Man erhält dann die gesuchte Integralgleichung:

$$x^4y+\sqrt{(1-x^2)}=C.$$

§. 182. Vermittelst einer besondern Relation, welche den homogenen Funktionen zukommt, läßt sich der integrirende Faktor für dieselben leicht bestimmen. Bedeutet nämlich V irgend eine homogene Funktion von x, y . . . , und ist m die Summe der Exponenten der Veränderlichen in jedem Gliede; so nimmt die Funktion nothwendig die Form l^mV an, wenn man darin lx, ly . . . statt x, y . . . setzt. Macht man hierauf $l=1+h$, so verwandelt sich V in:

$$(1+h)^mV=V[1+mh+\tfrac{1}{2}m(m-1)h^2+\ldots]$$

Andererseits erhält man aber, wenn x, y . . . respective in $x+hx$, $y+hy$ . . . übergeht, nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$(1+h)^mV=V+\frac{dV}{dx}hx+\frac{dV}{dy}hy$$
$$+\frac{d^2V}{dx^2}h^2x^2+\frac{d^2V}{dxdy}h^2xy+\frac{d^2V}{dy^2}h^2y^2+\text{ꝛc.}$$

Vergleicht man in diesen beiden Entwicklungen die zu einerlei Potenzen von h gehörigen Coefficienten, so findet man:

$$mV=\frac{dV}{dx}x+\frac{dV}{dy}y+\ldots,$$

$$m(m-1)V=\frac{d^2V}{dx^2}x^2+\frac{d^2V}{dxdy}2xy+\frac{d^2V}{dy^2}y^2+\ldots$$

So z. B. ist für $V=x^2y-3y^3+\frac{x^4}{y}$, wenn bloß die erste dieser Gleichungen berücksichtigt wird:

$$3\left(x^2y-3y^3+\frac{x^4}{y}\right)=\left(2xy+\frac{4x^3}{y}\right)x+y\left(x^2-9y^2-\frac{x^4}{y^2}\right).$$

Anmerkung. Dieser schöne Satz, welcher von Euler herrührt, läßt sich auch folgendermaßen ableiten. Es sei V eine homogene Funktion von zwei Veränderlichen x und y, und zwar:

$$V=Ax^ay^\alpha+By^\beta x^b+ \text{ꝛc.}, \text{ wo:}$$
$$a+\alpha=b+\beta=\ldots=m \text{ sein soll.}$$

Durch Differentiation entsteht:

$$dV=(Aax^{a-1}y^\alpha+Bbx^{b-1}y^\beta\ \ldots)dx$$
$$+(A\alpha x^ay^{\alpha-1}+B\beta x^by^{\beta-1}\ \ldots)dy,$$

so daß, wenn $dV=Mdy+Ndx$ gesetzt wird:

$$N=Aax^{a-1}y^\alpha+Bbx^{b-1}y^\beta+\ldots,$$
$$M=A\alpha x^ay^{\alpha-1}+B\beta x^by^{\beta-1}+\ldots.$$

Hieraus ergibt sich:

$$Nx=Aax^ay^\alpha+Bbx^by^\beta\ \ldots, \text{ und:}$$
$$My=A\alpha x^ay^\alpha+B\beta x^by^\beta\ \ldots; \text{ folglich:}$$
$$Nx+My=A(a+\alpha)x^ay^\alpha+B(b+\beta)x^by^\beta\ \ldots, \text{ d. h.:}$$
$$Nx+My=mV.$$

§. 183. Sind nun in der Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$, M und N homogene Funktionen vom Grade m, und nimmt man an, daß der integrirende Faktor auch eine homogene Funktion vom Grade n sei; so hat man, weil Nz eine homogene Funktion vom Grade m+n ist, vermöge der oben bewiesenen Relation:

$$(m+n)Nz=\frac{xd(Nz)}{dx}+\frac{yd(Nz)}{dy}.$$

Allein laut der Annahme ist:

$$\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy},$$

was ein Mittel darbietet, $\frac{d(Nz)}{dy}$ aus der vorhergehenden Gleichung wegzuschaffen, welche hierdurch in:

$$(m+n)Nz = x\frac{d(Nz)}{dx} + \frac{d(Myz)}{dx} = \frac{d(Nxz+Myz)}{dx} - Nz,$$ oder in:

$$(m+n+1)Nz = \frac{d[z(My+Nx)]}{dx}$$ übergeht.

Wegen des unbestimmten Exponenten n ist es erlaubt $n+m+1=0$ zu setzen; man erhält dadurch $Myz + Nxz = 1$, d. h. $z = \frac{1}{My+Nx}$ ist der integrirende Faktor der Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$.

Für die homogene, unvollständige Differentialgleichung:

$$y^2dx + x^2dy - xydy = 0$$ z. B. ist:

$$N = y^2 \text{ und } M = x^2 - xy;$$

folglich der integrirende Faktor $\frac{1}{My+Nx} = \frac{1}{x^2y}$. Wird die gegebene Differentialgleichung damit multiplicirt, so kommt:

$$\frac{ydx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x} = 0,$$

welche jetzt der Integrabilitätsbedingung Genüge thut.

Anmerkung. Die Annahme, daß z eine homogene Funktion sei, läßt sich dadurch rechtfertigen, daß man nachweist $\frac{Mdy+Ndx}{My+Nx}$ sei ein genaues Differential, wenn N und M homogene Funktionen sind. In der That ist dann, wenn:

$\frac{M}{My+Nx} = M_1$ und $\frac{N}{My+Nx} = N_1$ gesetzt wird, $\frac{dN_1}{dy} = \frac{dM_1}{dx}$.

Denn man hat:

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{1}{(My+Nx)^2}\left(My\frac{dN}{dy} - Ny\frac{dM}{dy} - NM\right),$$

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{1}{(My+Nx)^2}\left(Nx\frac{dM}{dx} - Mx\frac{dN}{dx} - MN\right).$$

Die oben bewiesene Eigenschaft der homogenen Funktionen gibt aber:

$$mN = x\frac{dN}{dx} + y\frac{dN}{dy},\quad mM = x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy}.$$

Nimmt man aus diesen letztern Gleichungen die Werthe von $y\frac{dN}{dy}$ und $y\frac{dM}{dy}$, um sie in den Ausdruck von $\frac{dN_1}{dy}$ zu substituiren, so findet man $\frac{dM_1}{dx}=\frac{dN_1}{dy}$.

Von den besondern Auflösungen.

§. 184. Es sei $V=0$ eine gegebene Differentialgleichung, deren vollständiges Integral wir mit $f(x, y, c)=0$ bezeichnen wollen, wobei c die willkührliche Constante ist; das unmittelbar durch Differentiation abgeleitete Differential dieses Integrals wird die Form $Pdy+Qdx=0$ haben. Erscheint nun die Constante c in dem vollständigen Integral $f=0$ nicht blos als additives oder subtractives Glied, so kommt dieselbe noch in dem Differential $Pdy+Qdx=0$ vor, und es entsteht die vorgelegte Differentialgleichung erst durch die Elimination von c zwischen den Gleichungen $f=0$ und $Pdy+Qdx=0$. So lange die beiden letztern Gleichungen dieselben bleiben, wird auch das Ergebniß dieser Elimination oder $V=0$ dasselbe sein, mag man dabei c als eine constante oder als eine variable Größe betrachten. Indem man c als veränderlich ansieht, erhält man zum Differential von $f=0$ die Gleichung:

$$Pdy+Qdx+Rdc=0,$$

worin P und Q dieselbe Bedeutung wie oben haben, und R ebenfalls eine Funktion von x, y und c ist. Die letzte Gleichung geht aber in $Pdy+Qdx=0$ über, wenn man $Rdc=0$ setzt. Die aus dieser Bedingungsgleichung abgeleiteten Werthe von c verwandeln daher $f=0$ in eine Gleichung $S=0$, welche der gegebenen Differentialgleichung $V=0$ Genüge leistet. Betrachten wir jetzt die verschiedenen Umstände näher, welche die Gleichung $Rdc=0$ darbieten kann.

1. $dc=0$ gibt $c=$ Constante; die Funktion bleibt mithin ungeändert.

2. Die Gleichung $R=0$ weist dem c einen constanten, bestimmten Werth zu: $f=0$ ist alsdann ein besonderes Integral, welches man dadurch erlangt, daß man in dem vollständigen Integral der willkührlichen Constante jenen Werth von c beilegt: dieser in dem vorhergehenden begriffene Fall bietet nichts weiter Bemerkenswerthes dar.

3. $R=0$ enthält kein c mehr, wenn solches in $f=0$ nur auf der ersten Potenz vorkommt; in diesem Falle genügt $R=0$ von selbst der Gleichung $V=0$. Denn im vorliegenden Falle hat man $f=0$ von der Form $U+cR=0$: dadurch entsteht aber, wenn man c aus der letztern Gleichung und seinem Differential $dU+cdR=0$ eliminirt:

$$V=RdU-UdR=0,$$

welcher Gleichung, wie man leicht sieht, $R=0$ Genüge thut. Da aber die Gleichung $U+cR=0$ auf die Form $\frac{U}{c}+R=0$ gebracht, in $R=0$ übergeht, wenn c unendlich groß wird; so ist die Gleichung $R=0$ nur als ein besonderes Integral zu betrachten, welches dem $c=$ unendlich groß entspricht.

4. Im Allgemeinen werden die aus $R=\frac{df}{dc}=0$ abgeleiteten Werthe von c Funktionen von x und y, und zwar so beschaffen sein, daß die aus ihrer Substitution in $f=0$ resultirende Gleichung $S=0$ die gegebene Differentialgleichung $V=0$ auflöst. Diese Gleichung $S=0$, welche keine willkührliche Constante mehr enthält und ohne in dem vollständigen Integral $f=0$ der gegebenen Differentialgleichung $V=0$ begriffen zu sein, ihr dennoch genügt, heißt eine besondere Auflösung derselben.

Anmerkungen: 1. Aus dem Gesagten ergibt sich sofort folgende Regel, um die besondere Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung zu erhalten, wenn man deren vollständiges Integral kennt: Man differentiirt dieses Integral blos in Bezug auf die darin vorkommende willkührliche Constante und eliminirt dann gedachte Constante zwischen dem gefundenen Differentialcoefficienten und dem vorliegenden Integral. Das Resultat ist eine besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung, in sofern es nicht durch einen besondern, dem c beigelegten Werth aus dem vollständigen Integral abgeleitet werden kann.

2. Eine andere Gattung von besondern Auflösungen einer gegegebenen Differentialgleichung $Mdy+Ndx=0$ sind die Faktoren derselben, welche, die Differentiale dx und dy nicht mehr enthaltend, der Null gleich gesetzt, Relationen zwischen x und y aufstellen, welche der vorgelegten Differentialgleichung

genügen. Man bekommt diese Art von Auflösungen dadurch, daß man den gemeinschaftlichen Theiler zwischen M und N sucht.

Beispiele: 1. Eliminirt man die Constante c zwischen der ursprünglichen Gleichung $y^2-2cy+x^2=c^2$ und ihrer Derivirten, so erhält man:

$$(x^2-2y^2)y'^2-4xyy'-x^2=0.$$

Die primitive Gleichung nach c differentiirt und durch dc dividirt, gibt $c=-y$. Durch Substitution dieses Werthes in das vollständige Integral bekommt man $x^2+2y^2=0$, welches Resultat, wie man sich leicht überzeugen kann, unserer Differentialgleichung genügt, obschon es in deren Integral nicht begriffen ist.

2. Ebenso gibt die Elimination von c zwischen der Gleichung $x^2-2cy-b-c^2=0$ und ihrer Derivirten das Resultat:

$$y'^2(x^2-b)-2xy'y=x^2.$$

Die Differentiation in Bezug auf c allein gibt $c=-y$, wodurch sich die ursprüngliche Gleichung in $x^2+y^2=b$ verwandelt, was eine besondere Auflösung unserer Differentialgleichung ist.

3. $y=x+(c-1)^2\sqrt{x}$ gibt $R=2(c-1)\sqrt{x}$, woraus $c=1$. Die diesem Werthe entsprechende Gleichung $y=x$ bildet keine besondere Auflösung, sondern blos ein besonderes Integral.

4. Die Gleichung $y^2+x^2=2cx$ gibt $R=2x=0$, was ein dem $c=$ unendlich groß entsprechendes, besonderes Integral anzeigt.

§. 185. Folgende Bemerkungen stehen hier ganz an ihrem Ort:

1. Die besonderen Auflösungen müssen mit eben so viel Sorgfalt als die vollständigen Integrale gesucht werden, weil sie die eigentliche Auflösung des Problems enthalten können, das zur Differentialgleichung geführt, welche man zu integriren hatte.

2. Da die Gleichung $\frac{df}{dc}=0$ die Bedingung ausdrückt, daß $f(x, y, c)=0$ gleiche Wurzeln in Bezug auf c habe; so wird, wenn man zwischen der die besondere Auflösung enthaltenden Gleichung und dem vollständigen Integral x oder y eliminirt, das daraus entspringende Resultat gleiche Faktoren bekommen. So verwandelt sich in dem ersten der hier oben angeführten Beispiele die vorgelegte Gleichung, wenn man $x^2=-2y^2$ setzt, in:

$$y^2+2cy+c^2=(y+c)^2=0.$$

3. Wegen der Willkührlichkeit der Constante c kann man das vollständige Integral ansehen, als stelle es eine unendliche Anzahl von Curven dar, welche durch den Parameter c von einander unterschieden sind. Legt man mithin dem c alle möglichen Werthe bei, so werden sich die auf einander folgenden Linien je zwei in einer Reihe von Punkten treffen, deren System eine Curve bilden wird, welche die erstern sämmtlich berührt. Bei jeder der letztgedachten Curven ist c durchaus constant, während es bei der berührenden Curve eine Funktion der Coordinaten des Berührungspunktes ist. Da nun in diesen Punkten y' denselben Werth für die berührten Curven, wie für die Berührende hat; so muß y' denselben Werth bekommen, mag man c constant oder variabel in $f(x, z, c)=0$ betrachten. Eliminirt man daher c zwischen $f=0$ und $\frac{df}{dc}=0$, so wird die daraus entstehende Gleichung, welche die besondere Auflösung abgibt, der Curve angehören, die alle in dem allgemeinen Integral enthaltenen Curven berührt.

4. Denkt man sich aus der Gleichung $f(x, y, c)=0$ den Werth $c=\varphi(x, y)$ gesucht und denselben statt c in $f(x, y, c)=0$ zurück substituirt; so wird das Resultat, so wie jede nach x oder y daraus abgeleitete Derivirte, mit Null identisch sein. Man hat hiernach:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dc}\cdot\frac{dc}{dx}=0 \text{ und } \frac{df}{dy}+\frac{df}{dc}\cdot\frac{dc}{dy}=0, \text{ woraus:}$$

$$\frac{dc}{dx}=-\frac{df}{dx}:\frac{df}{dc} \text{ und } \frac{dc}{dy}=-\frac{df}{dy}:\frac{df}{dc}.$$

Da nun, wie wir gesehen, für eine besondere Auflösung der Ausdruck $\frac{df}{dc}=0$ sein muß; so werden im vorliegenden Falle die Ausdrücke $\frac{dc}{dx}$ und $\frac{dc}{dy}$ unendlich. Diese den besondern Auflösungen zukommende Eigenschaft bietet ein Mittel dar, dieselben zu erhalten. Das Umgekehrte findet jedoch nicht nothwendig statt, d. h. jene Relationen, für welche die Ausdrücke $\frac{dc}{dx}$ und $\frac{dc}{dy}$ unendlich werden, führen nicht nothwendig besondere Auflösungen herbei. Man muß sich daher versichern, ob die gefundene Relation mit der primitiven Gleichung

$f=0$ combinirt, nicht für c einen constanten Werth liefert; geschieht dies, so hat man nur ein besonderes Integral.

Aus dem zweiten der obigen Beispiele $x^2-2cy-c^2-b=0$ erhält man:
$$c=-y+\sqrt{(x^2+y^2-b)},\ \frac{dc}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}}.$$

Die Gleichung $x^2+y^2=b$, welche diesen Bruch unendlich macht, ist in der That, wie wir schon gefunden, eine besondere Auflösung.

5. Die Existenz der besondern Auflösungen ist zunächst an die Bedingung geknüpft, daß der aus $R=\frac{df}{dc}=0$ für c gefundene Werth nicht constant wird; es darf aber auch c, wenn es sich schon als Funktion von x und y herausstellt, nicht so beschaffen sein, daß man durch ihre Combination mit $f(x, y, c)=0$ zu einem Ausdrucke gelangt, der auch erhalten werden kann, indem man dem c in $f=0$ einen schicklichen constanten Werth beilegt.

Beispiele: 1. Für $(x^2+y^2-b)(y^2-2cy)+(x^2-b)c^2=0$ bekommt man: $R=-y(x^2+y^2-b)+(x^2-b)c=0$, woraus:
$$c=\frac{y(x^2+y^2-b)}{x^2-b}.$$

Dieser Werth für c in die erste Gleichung substituirt, gibt:
$$y^4(y^2+x^2-b)=0,$$
welches Resultat man auch unmittelbar aus der gegebenen Gleichung ableitet, wenn man darin $c=0$ setzt; dasselbe bildet daher keine besondere Auflösung, sondern blos ein besonderes Integral der durch die Elimination von c zum Vorschein kommenden Differentialgleichung.

2. Für $y=x+(c-1)^2(c-x)^2$ hat man:
$$R=(c-x)(c-1)(2c-x-1)=0.$$

Dem $c=1$ entspricht das besondere Integral $y=x$; Aehnliches liefert $c=x$, obschon c veränderlich ist. Endlich gibt $c=\frac{1}{2}(x+1)$ die besondere Auflösung.

6. Es sei z der integrirende Faktor von $y'+K=0$, so daß $z(y'+K)=0=\varphi'$ das vollständige Differential von $\varphi(x, y)=c$ ist. Da in dieser Gleichung die besondere Auflösung $S=0$ nicht enthalten sein darf, so darf die Funktion $\varphi(x, y)$ durch die Substitution des aus $S=0$ gewonnenen Werthes $y=\psi x$ nicht auf eine beständige Größe

reducirt werden; es kann also durch $y=\psi x$ das Differential φ' oder $z(y'+K)$ nicht zum Verschwinden gebracht werden, während $y'+K$ dadurch auf Null reducirt wird; durch die besondere Auflösung erhält daher der Faktor z die Null im Nenner, damit $z(y'+K)$ so dem Verschwinden entgehe. Hieraus folgt, daß alle Faktoren, welche geeignet sind, die vorgelegte Differentialgleichung integrabel zu machen, durch die besonderen Auflösungen unendlich werden; oder vielmehr eine Differentialgleichung läßt sich durch eine passende Transformation dergestalt zubereiten, daß ihre besondere Auflösung als Faktor heraustritt.

§. 186. Die hier vorgetragene Methode zur Bestimmung der besondern Auflösungen einer gegebenen Differentialgleichung setzt die Kenntniß des allgemeinen Integrals oder doch des integrirenden Faktors voraus. Wie man aber die besondere Auflösuug einer Differentialgleichung, wenn sie eine solche zuläßt, ohne diese Hülfsmittel aus ihr selbst herleiten könne, wollen wir jetzt untersuchen.

Es sei deshalb $y=X$ ein Werth, welcher einer gegebenen Differentialgleichung $y'=F(x, y)$ genügt. Die Frage ist also, wie man findet, ob $y=X$, wo X keine willkührliche Constante enthält, eine besondere Auflösung oder ein besonderes Integral ist. Nimmt man an, daß $y=\psi(x, k)$ das vollständige Integral von $y'=F(x, y)$ darbietet, wobei k die willkührliche Constante bezeichnet; so wird sich, falls dieses Integral den Ausdruck $y=X$ in sich faßt, $\psi(x, k)$ in X verwandeln, wenn man der willkührlichen Constante einen gehörigen Werth b beilegt, oder der Unterschied $\psi(x, k)-X$ auf Null reduciren, wenn $k=b$. Hieraus folgt:

$$\psi(x, k)-X=(k-b)^m z,$$

wo der Exponent m positiv ist und z eine Funktion von x und a bezeichnet, welche weder Null, noch unendlich für $k=b$ wird. Die Constante $(k-b)^m$ durch c darstellend, haben wir demnach für das vollständige Integral von $y'=F(x, y)$ den Ausdruck $y=X+cz$. Substituiren wir diesen Werth von y in die gegebene Differentialgleichung $y'=F(x, y)$, so wird die daraus entspringende Relation:

$$X'+cz'=F(x, X+cz)$$

identisch werden müssen. Nun hat aber einerseits die Entwicklung von z nach steigenden Potenzen von c die Form:

$$z=K+Ac^a+Bc^b \ldots,$$

wo die Exponenten $a, b \ldots$ positiv und die Funktionen $K, A, B \ldots$ von c unabhängig sind; folglich:

$$X' + cz' = X' + K'c + A'c^{a+1} + \text{rc.}$$

Andererseits muß aber die Entwicklung von $F(x, X+cz)$ nach steigenden Potenzen von cz ähnlicherweise:

$$F(x, X) + Mc^m z^m + Nc^n z^n + \ldots$$

sein, wo die Exponenten $m, n \ldots$ positiv und die Coefficienten $M, N \ldots$ bekannte Funktionen von x sind. Indem wir hier für z seine gleichgeltende Entwicklung setzen, bekommen wir, weil $X' = F(x, X)$ ist:

$$K'c + A'c^{a+1} + \ldots = Mc^m (K + Ac^a + \ldots)^m + Nc^n (K + Ac^a \ldots)^n + \text{rc.}$$

Es fragt sich jetzt, ob es möglich ist, z oder vielmehr die Coefficienten $A, B \ldots$, welche Funktionen von x sind, und die Größen $a, b \ldots$ dergestalt zu bestimmen, daß diese Gleichung identisch werde; geht dies nicht an, so ist $y = X$ eine besondere Auflösung, im entgegengesetzten Falle aber ein besonderes Integral.

Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn $m > 1$, so findet sich für das Glied $K'c$ kein entsprechendes, um es zu tilgen: wir setzen daher $K' = 0$, woraus $K = \text{const.}$ Ferner ist $a + 1 = m$, $A' = MK^m$; es folgt daraus $a = m - 1$ u. $A = \int MK^m dx$, und so mit den übrigen Gliedern. Die Identität läßt sich demnach hier immer zu Stande bringen; $y = X$ ist mithin ein besonderes Integral.

2. Für $m = 1$ findet das Nämliche statt; denn setzt man $K' = MK$, so bekommt man $lK = \int Mdx$. Es ist hierauf leicht, die beiden Theile zu ordnen und die entsprechenden Coefficienten und Exponenten Glied für Glied mit einander zu vergleichen; auf diese Weise werden die Exponenten $a, b \ldots$ und die Coefficienten $K, A, B \ldots$ bestimmt.

3. Man findet, wenn $m < 1$, für das Glied $Mc^m K^m$ kein Glied auf der linken Seite, was sich mit ihm vergleichen ließe, weil daselbst kein c mit einem Exponenten, der kleiner als 1 wäre, vorhanden ist. Der verlangten Identität auf irgend eine Weise zu genügen, ist daher nicht mehr möglich, weil K nicht Null sein kann; die Gleichung $y = X$ ist folglich eine besondere Auflösung.

§. 187. Hieraus folgt ein Verfahren, die besondere Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung von der ersten Ordnung, ohne

deren vollständiges Integral zu kennen, unmittelbar aus ihr selbst herzuleiten. Denn setzt man $X+cz$ statt y in $F(x, y)$, so wird für $m<1$ die Entwicklung nach dem Taylor'schen Lehrsatze zwischen dem ersten und zweiten Gliede mangelhaft, d. h. $y=X$ ist eine besondere Auflösung, wenn die Derivirte von $F(x, y)$ in Bezug auf y unendlich groß wird (§. 43). Und umgekehrt, ein Werth $y=X$, welcher die gegebene Differentialgleichung $y'=F(x, y)$ befriedigt und $\frac{dF}{dy}$ unendlich macht, ist eine besondere Auflösung derselben, weil er die Entwicklung von $F(x, X+cz)$ auf die Form $X'+Mc^m K^m \ldots$ bringt, wo $m<1$.

Die Bedingung $\frac{dF}{dy}$ und $\frac{dy'}{dy}=\infty$ macht also den eigenthümlichen Charakter der besondern Auflösungen aus; damit sie in Erfüllung gehe, muß die Funktion F, wenn sie algebraisch ist, ein Wurzelzeichen enthalten, was durch die Annahme $y=X$ verschwindet (§. 46).

In dem zweiten Beispiele des §. 184 hat man so die Gleichungen:

$$y'=x\frac{[y\pm\sqrt{(x^2+y^2-b)}]}{x^2-b},\ \frac{dy'}{dy}=\frac{x}{x^2-b}\left(1\pm\frac{y}{\sqrt{(y^2+x^2-b)}}\right);$$

und in der That macht die besondere Auflösung $y^2=b-x^2$ den letzten Bruch unendlich groß.

§. 188. Um also die besondere Auflösung ohne Hülfe des allgemeinen Integrals zu erhalten, braucht man blos den Werth von $\frac{dy'}{dy}$ zu suchen und denselben unendlich groß zu machen, d. h. wofern $\frac{dy'}{dy}=\frac{U}{T}$ ist, $T=0$ oder $U=\infty$ zu setzen. Die diesen Gleichungen nicht gemeinschaftlich angehörigen Faktoren, welche die gegebene Differentialgleichung $y'=F(x, y)$ befriedigen, werden allein die besondern Auflösungen der letztern sein.

Für $y'=a(y-n)^k$ hat man $\frac{dy'}{dy}=ak(y-n)^{k-1}$.

Dieser Ausdruck kann nur dann unendlich groß werden, wenn $k<1$ und zugleich $y=n$, welcher letztere Werth die vorgelegte Gleichung blos befriedigt, wenn k positiv ist. In diesem Falle ist $y=n$ eine besondere Auflösung von $y'=a(y-n)^k$, dessen vollständiges Integral $\frac{(y-n)^{1-k}}{1-k}=ax+c$ ist.

§. 189. Die Anwendung unseres Lehrsatzes erfordert es nicht durchaus, daß man die Differentialgleichung auf die Form $y' = F(x, y)$ bringe. Denn bezeichnet $V = 0$ jene Gleichung, wo V eine Relation zwischen x, y und y' bedeutet; so kann man y' als eine durch diese Relation bestimmte Funktion von x und y ansehen. Das partielle Differential von y' in Bezug auf y ergibt sich dann aus:

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0;$$ hieraus folgt:

$$\frac{dV}{dy'} = 0$$ oder $$\frac{dV}{dy} = \infty,$$ wenn $\frac{dy'}{dy}$ unendlich groß werden soll.

Ist die Gleichung $V = 0$ algebraisch, rational und ganz; so fällt die letzte Bedingung weg. Es bleibt alsdann nur noch y' zwischen $V = 0$ und $\frac{dV}{dy'} = 0$ zu eliminiren übrig. Dabei hat man übrigens nur diejenigen Faktoren von $\frac{dV}{dy'} = 0$ zu nehmen, die es nicht zugleich von $\frac{dV}{dy}$ sind.

Man wird auf diese Weise nur diejenigen besondern Auflösungen kennen lernen, in welchen y erscheint; allein man wird auch zu denjenigen gelangen, in welchen nur x vorkommt, wenn man in Bezug auf x ein ähnliches Raisonnement anstellt.

Anmerkung. Differentiirt man die Gleichung $V = 0$, so hat man:

$$\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dy'} dy' = 0.$$

Die besondere Auflösung liefert $\frac{dV}{dy'} = 0$, mithin muß auch $\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy$ verschwinden. Das Kennzeichen der besondern Auflösung von $V = 0$ läßt sich demnach so ausdrücken, indem man sagt, es werde durch dieselbe die Derivirte $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, wie sie aus der Differentiation der Gleichung $V = 0$ entsteht, auf die Form $\frac{0}{0}$ gebracht.

Um also die besondere Auflösung einer gegebenen Differentialgleichung von der ersten Ordnung zu finden, suche man die

Derivirte y'' und setze sie gleich $\frac{0}{0}$; man bekommt so zwei Gleichungen zwischen x, y und y', welche durch die Elimination von y' mit der vorgelegten zwei neue Gleichungen in x und y liefern werden. Besitzen diese nur einen gemeinsamen Faktor, so ist derselbe die besondere Auflösung der gegebenen Differentialgleichung.

Das zweite Beispiel im §. 184 $y'^2(x^2-b)-2xyy'-x^2=0$
hat zur Derivirten $2y''[(x^2-b)y'-xy]-2(yy'+x)=0$;
woraus $y''=\frac{yy'+x}{y'(x^2-b)-xy}$.

Setzt man $yy'+x=0$ und $y'(x^2-b)-xy=0$, und eliminirt dann y' mittelst dieser Gleichungen aus der vorgelegten, so bekommt man bei beiden dieselbe Endgleichung $x^2(y^2+x^2-b)=0$, welche wir in der That schon als eine besondere Auflösung erkannt haben.

§. 190. Das im vorigen Paragraphen Vorgetragene wollen wir noch auf folgende Beispiele anwenden:

1. Aus $(x^2-2y^2)y'^2-4xyy'-x^2=0$ entsteht durch Differentiation:

$$\frac{dV}{dy'}=(x^2-2y^2)y'-2xy=0.$$

Durch die Elimination von y' zwischen diesen beiden Gleichungen findet man die besondere Auflösung $x^2+2y^2=0$.

2. Aus $xdx+ydy=dy\sqrt{(x^2+y^2-c^2)}$, oder, wenn man das Wurzelzeichen wegschafft, aus $x^2+2xyy'+y'^2(c^2-x^2)=0$ erfolgt durch Differentiation in Bezug auf y' die Gleichung:

$$xy+y'(c^2-x^2)=0.$$

Indem man y' zwischen den beiden vorhergehenden Gleichungen eliminirt, ergibt sich die besondere Auflösung $x^2+y^2=c^2$.

3. Für $ydx-xdy=a\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ findet man:

$$y^2-a^2=2xyy'+y'^2(a^2-x^2),$$

woraus, wenn man y' mittelst der Gleichung $xy=y'(x^2-a^2)$ eliminirt, man zu der besondern Auflösung $x^2+y^2=a^2$ gelangt.

4. Behandeln wir jetzt die allgemeinere Gleichung $y=xy'+Y_1$ auf dieselbe Weise, wo Y_1 eine beliebige Funktion von y' ist; so

haben wir $x+\frac{dY_1}{dy'}=0$. Die besondern Auflösungen entspringen daher aus der Elimination von y' zwischen dieser letztern und der gegebenen Differentialgleichung. Der französische Mathematiker Clairaut war der erste, welcher auf die Gleichungen $y=xy'+Y_1$ in Rücksicht auf ihre besondere Auflösung aufmerksam machte.

§. 191. Weil sich ohne Beihülfe des vollständigen Integrals einer gegebenen Differentialgleichung $V=0$ die besondern Auflösungen derselben finden lassen, für welche der die vorgelegte Gleichung integrirbar machende Faktor z unendlich wird; so kann man öfters durch analytische Kunstgriffe diesen Faktor z finden. Ein Beispiel wird hinreichend sein, zu zeigen, worauf es bei dergleichen Verfahren ankommt. Das dritte der vorhergehenden Beispiele, für welches die besondere Auflösung $x^2+y^2-a^2=0$ gefunden wurde, gibt in Bezug auf y' aufgelöst:

$$(a^2-x^2)y'+xy=a\sqrt{(y^2+x^2-a^2)},$$

welcher Gleichung offenbar durch $x^2-a^2=0$ Genüge geschieht. Man versucht, ob der Faktor z von der Form:

$$(x^2-a^2)^m(y^2+x^2-a^2)^n,$$

wo m und n unbestimmt sind, sein könne. Zu diesem Behuf multiplicirt man mit der letzten Funktion die vorstehende Gleichung, und setzt dann die im §. 177 aufgestellte Integrabilitätsbedingung (1) an. Da dieselbe befriedigt wird, wenn man $m=-1$ und $n=-\frac{1}{2}$ nimmt; so ist:

$$(x^2-a^2)^{-1}(y^2+x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

der integrirende Faktor der gegebenen Differentialgleichung.

Anmerkung. Diejenigen Leser, welche die interessante Lehre von den besondern Auflösungen, so wie anderes zu der Integralrechnung Gehöriges noch ausführlicher studiren wollen, verweisen wir auf nachstehende Werke:

1. Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen in's Deutsche übersetzt von J. Salomon.
2. Traité du calcul différentiel et intégral, par Lacroix. 3 vol.
3. Mémoires de l'académie de Paris.

4. Le journal de l'école polytechnique.
5. Leçons sur le calcul des fonctions, par Lagrange. In's Deutsche übertragen von Crelle.
6. Exercices de calcul intégral, par Legendre.
7. Abhandlungen der Berliner Akademie.
8. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik.

Von den Differentialgleichungen der ersten Ordnung, in welcher die Differentiale den ersten Grad übersteigen.

§. 192. Wir wollen uns jetzt mit der Integration der Differentialgleichung $F(x, y, y', y'^2 \ldots y'^n) = 0$ beschäftigen, welche dadurch entstanden ist, daß man eine zur nten Potenz erhobene Constante c aus der ursprünglichen Gleichung und ihrer unmittelbaren Derivirten eliminirt hat. Stellen wir den aus der ursprünglichen Gleichung entnommenen Werth dieser Constante durch $c = \varphi(x, y)$ dar, so wird die Derivirte y' nur auf der ersten Potenz in der Gleichung $\varphi'(x, y) = 0$ vorkommen, aus welcher sich $y' = X$ ergibt, wo X eine irrationale Funktion von x und y bezeichnet. Da nun durch Potenzirungen diese Irrationalität verschwindet und die gegebene Gleichung $F = 0$ wieder zum Vorschein kommt; so wird $y' - X$ ein Faktor von F sein. Löst man demnach unsere Gleichung in Bezug auf y' auf, so erhält man ein System von Differentialgleichungen des ersten Grades, nämlich:

$$y' - X = 0, \; y' - X_{,} = 0 \; \ldots,$$

welche man nach den vorgetragenen Regeln zu integriren suchen muß, weil die Differentiale in ihnen nur auf dem ersten Grade erscheinen. Sind

$$P = 0, \; Q = 0, \; R = 0 \; \ldots$$

die auf diese Art gefundenen Integrale, so wird jedes einzelne wie auch das Produkt einer beliebigen Anzahl derselben der gegebenen Differentialgleichung, welche mit:

$$(y' - X)(y' - X_1) \ldots = 0$$

gleichbedeutend ist, genügen; denn die Derivirte von $PQR \ldots (1) = 0$ ist:

$$P'QR \ldots + PQ'R \ldots + PQR' \ldots + \text{ꝛc.} = 0,$$

welche offenbar für $P = 0$ verschwindet. Dasselbe gilt, wenn man irgend einen andern Faktor der Gleichung (1) gleich Null setzt.

Beispiele: 1. Aus $yy'^2+2xy'=y$, zieht man:

$$y'=\frac{-x\pm\sqrt{(y^2+x^2)}}{y};\text{ ferner }\frac{yy'+x}{\sqrt{(y^2+x^2)}}=\pm 1.$$

Hieraus folgt, weil der erste Theil die Derivirte von:

$\sqrt{(y^2+x^2)}$ ist, $\pm\sqrt{(y^2+x^2)}=x+c$ oder $y^2=2cx+c^2$.

2. Aus $y'^2-ax=0$ ergibt sich $y'=\pm\sqrt{ax}$; mithin durch's Integriren $y=\pm\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+c$. Läßt man das Wurzelzeichen verschwinden, so kommt:

$$(y-c)^2=\frac{4}{9}ax^3.$$

§. 193. Die hier vorgetragene Methode ist ganz allgemein, nur ist sie allen Schwierigkeiten unterworfen, welche die Auflösung der Gleichungen mit sich führt. In einzelnen Fällen läßt sich jedoch diese Auflösung umgehen, wie wir an folgenden Beispielen sehen werden.

1. Kommt in der vorgelegten Differentialgleichung nur y' und x vor, und ist sie leichter in Bezug auf x als auf y' aufzulösen; so wird man daraus x suchen und eine Gleichung $x=Fy'$ erhalten. Aus $dy=y'dx$ folgt dann $y=xy'-\int xdy'$, oder, wenn man statt x seinen Werth Fy' setzt:

$$y=y'Fy'-\int Fy'\cdot dy'.$$

Nach bewerkstelligter Integration wird man y' aus dieser Gleichung und der vorgelegten eliminiren, um das gesuchte Integral zu erhalten.

Für $(1+y'^2)x=1$ hat man:

$$Fy'=\frac{1}{1+y'^2},\ y=\frac{y'}{1+y'^2}-\int\frac{dy'}{1+y'^2}.$$

Erwägt man, daß das letzte Glied $=\text{arc}(\text{tang}=y')+c$, und eliminirt y'; so bekommt man:

$$y=\sqrt{(x-x^2)}-\text{arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+c$$

als gesuchte Integralgleichung.

Enthält die Differentialgleichung außer y' blos noch die Veränderliche y, und ist sie leichter nach y als nach y' auflösbar; so kann man auf ähnliche Art verfahren.

2. Hat die Gleichung die Form $x=F(y, y')$, so entsteht daraus:

$$dx=Rdy+Sdy', \text{ oder } (R-y')dy+Sdy'=0.$$

Ließe sich diese Gleichung integriren, so hätte man zwischen y, y' und einer willkührlichen Constanten eine Relation, vermittelst welcher man y' aus der vorgelegten Gleichung eliminiren und damit das gesuchte Integral finden könnte.

Für $y^4y'^2-2xy^3y'^3-a=0$ hat man:

$$x=\frac{y}{2y'}-\frac{a}{2y^3y'^3}.$$

Differentiirt man und setzt $\frac{dy}{y'}$ statt dx, so kommt:

$$(y'dy+ydy')\left(1-\frac{3a}{y'^2y^4}\right)=0.$$

Nimmt man den Faktor $y'dy+ydy'=0$ und integrirt, so findet man $yy'=c$; worauf die Elimination von y' zwischen dieser und der vorgelegten Gleichung zum gesuchten Integral:

$$y^2-2cx-\frac{a}{c^2}=0 \text{ führt.}$$

Eliminirt man aber y' zwischen $1-\frac{3a}{y'^2y^4}=0$ und der gegebenen Gleichung, so erhält man die besondere Auflösung $y^6=27ax^2$.

Ist die Gleichung von der Form $y=F(x, y')$, so zieht man daraus $dy=Pdx+Qdy'$, oder weil $dy=y'dx$ ist:

$$(P-y')dx+Qdy'=0;$$

das weitere Verfahren ist dann dem vorigen ganz ähnlich.

3. Wenn die Differentialgleichung in Bezug auf x und y homogen ist, so setze man $y=zx$; dadurch geht x aus der Differentialgleichung ganz weg und es bleibt nur noch eine Relation zwischen y' und z. Es ist aber offenbar $y'dx=zdx+xdz$, folglich:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{y'-z} \text{ und } lx=\int\frac{dz}{y'-z}; \text{ desgleichen wegen:}$$

$$\frac{dz}{y'-z}=\frac{d(z-y')}{y'-z}+\frac{dy'}{y'-z},$$

$$lx=-l(y'-z)+\int\frac{dy'}{y'-z}.$$

Man erhält also, je nachdem es leichter y' durch z, oder z durch

y' darzustellen, mittelst des ersten Ausdrucks x als eine Funktion von z, und mittelst des zweiten Ausdrucks als eine Funktion von y'. Die Elimination von z oder y' gibt endlich die gesuchte Integralgleichung.

Für $xdy - ydx = x\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ erhält man, wenn $y = xz$ gesetzt wird, $y' - z = \sqrt{(1+y'^2)}$. Mittelst der zweiten Formel findet man alsdann:

$$x = \frac{c[y' + \sqrt{(1+y'^2)}]}{\sqrt{(1+y'^2}}, \text{ ferner } y = \frac{-c}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

Die Elimination von y' zwischen diesen beiden Gleichungen gibt hierauf $x^2+y^2-2cx=0$ als gesuchtes Integral.

4. Ist die Gleichung von der Form $y = y'x + Fy'$, so entsteht durch Differentiation:

$$dy = y'dx + \left(x + \frac{dF}{dy'}\right)dy', \text{ oder, wegen } dy = y'dx: \left(x + \frac{dF}{dy'}\right)dy' = 0,$$

welche Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$x + \frac{dF}{dy'} = 0, \quad dy' = 0.$$

Die zweite integrirt, gibt $y' = c$, so daß $y = cx + C$ das gesuchte Integral ist, wo C dasjenige bezeichnet, wozu Fy' bei derselben Annahme wird. Die Elimination von y' zwischen der zweiten Gleichung $x + \frac{dF}{dy'} = 0$ und der vorgelegten bildet eine besondere Auflösung derselben.

Die Gleichung $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ z. B. unter die Form:

$$y = y'x + a\sqrt{(1+y'^2)} \text{ gebracht, führt auf:}$$

$$y' = c \text{ und } x + \frac{ay'}{\sqrt{(1+y'^2)}} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt das vollständige Integral $z = cx + a\sqrt{(1+c^2)}$, während die zweite die besondere Auflösung $z^2 + x^2 = a^2$ liefert.

Anmerkungen: 1. Ist die Differentialgleichung von der Form $y = x\varphi y' + Fy'$, so hat man:

$$(y' - \varphi)dx - x\frac{d\varphi}{dy'}\ dy' = \frac{dF}{dy'}dy', \text{ oder:}$$

$$dx - \frac{x \cdot \frac{d\varphi}{dy'} dy'}{y'-\varphi} = \frac{\frac{dF}{dy'} dy'}{y'-\varphi},$$

eine Gleichung, welche nach §. 175 zu integriren ist.

2. Sehr leicht läßt sich die Integration der Gleichung:

$$F(y', y'^2 \ldots y'^n) = 0$$

bewerkstelligen, wenn darin die Veränderlichen x und y nicht erscheinen. Denn alsdann ist y' eine constante Größe, folglich $y = y'x + c$ und $y' = \frac{y-c}{x}$. Man darf daher nur diesen Werth statt y' in die vorgelegte Gleichung substituiren, um das verlangte Integral zu erhalten.

Von den willkührlichen Constanten; von der näherungsweisen Auflösung der Differentialgleichungen und der Methode, dieselben zu construiren.

§. 194. Es sei die Maclaurin'sche Reihe:

$$y = fx = f0 + xf'0 + \frac{x^2}{2} f''0 + \text{rc.},$$

wo $f0$, $f'0$, $f''0$ ... die constanten Werthe sind, welche die Funktionen fx, $f'x$, $f''x$ ... für $x = 0$ annehmen. Ist nun eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung gegeben, so lassen sich daraus durch wiederholte Differentiationen die Werthe von y'', y''' ... ableiten, wonach, wenn man für y' den von der gegebenen Gleichung dargebotenen Werth substituirt, man alle Derivirten in Funktionen der ursprünglichen Veränderlichen ausgedrückt erhält. Indem man dann in den auf solche Weise gefundenen Ausdrücken $x = 0$ macht, dem $y = f0$ entspricht, werden die Werthe von $f'0$, $f''0$ ... bestimmt sein, so daß in unserer oben stehenden Reihe Alles bekannt ist, mit Ausnahme von $f0$, was willkührlich bleibt.

Eben so werden für eine gegebene Differentialgleichung von der zweiten Ordnung y'', y''' ... in Funktionen von x, y und y' ausgedrückt, so daß, wenn man die Werthe $x = 0$, $y = f0$ und $y' = f'0$ in unsere Reihe einführt, darin Alles bekannt ist, die beliebigen Constanten $f0$ und $f'0$ ausgenommen. Aehnliches gilt für die Differentialgleichungen der höhern Ordnungen.

Diese Integrationsmethode kann man nicht mehr anwenden, wenn für $x=0$ die Funktionen fx, $f'x$, $f''x\ldots$ unendlich werden, in welchem Falle die Maclaurin'sche Formel aufhört zulässig zu sein. Man würde alsdann in der Taylor'schen Reihe $x=a$ machen, wo a eine beliebige Zahl bedeutet, die in gedachten Funktionen jene Wirkung nicht hervorbringt. Hierdurch bekäme man, wenn A, A', A'' . . . diejenigen Werthe von y und von ihren Derivirten sind, welche $x=a$ entsprechen:

$$f(a+h)=A+A'h+\tfrac{1}{2}A''h^2+\tfrac{1}{6}A'''h^3+ \text{ꝛc.}, \text{ woraus}$$

$$y=fx=A+A'(x-a)+\tfrac{1}{2}A''(x-a)^2+ \text{ꝛc.},$$

wenn man $h=x-a$ macht.

Man sieht auf dieselbe Weise, wie vorhin, daß in der letzten Reihe Alles bekannt ist, ausgenommen A, wenn die gegebene Differentialgleichung von der ersten Ordnung; ausgenommen A und A', wenn diese Gleichung von der zweiten Ordnung ist; u. s. w. Die Größe a, welche die Veränderliche x hier einführt, wird nicht zu den willkührlichen Constanten gerechnet; dafür wird's der Werth von A, welchen y alsdann annimmt.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich nun Folgendes:

1. Für jede zwischen zwei Veränderlichen bestehende Differentialgleichung existirt jederzeit eine Reihe, welche deren Integral ist; es läßt sich diese Reihe finden, von den Schwierigkeiten abgesehen, welche die Rechnung darbieten kann.

2. Das Integral besitzt ebensoviel willkührliche Constanten, als die Ordnung der Differentialgleichung Einheiten enthält. Obschon dieser Schluß auf die Theorie der Reihen gegründet ist, so hat er doch die gewünschte Vollständigkeit, weil jede Reihe als gleichgeltende Entwicklung eines endlichen Ausdruckes $y=fx$, in welchem ebensoviele willkührliche Constanten als in der Reihe vorkommen, angesehen werden kann.

3. Jedes wie auch immer gewonnenes Integral wird, wofern es die erforderliche Anzahl willkührlicher Constanten enthält, die ursprüngliche Gleichung einer gegebenen Differentialgleichung sein, und jedes andere Integral in sich schließen, welches, die nämliche Anzahl willkührlicher Constanten enthaltend, derselben ebenfalls genügen würde.

§. 195. Macht man $h = -x$ in:

$$f(x+h) = y + y' h + \tfrac{1}{2} y'' h^2 \ldots,$$
$$f'(x+h) = y' + y'' h + \tfrac{1}{2} y''' h^2 \ldots,$$
$$f''(x+h) = y'' + y''' h + \tfrac{1}{2} y^{IV} h^2 \ldots \text{ꝛc.; so findet man:}$$

$$(1) \ldots f0 = y - y' x + \tfrac{1}{2} y'' x^2 - \ldots,$$
$$(2) \ldots f'0 = y' - y'' x + \tfrac{1}{2} y''' x^2 - \ldots,$$
$$(3) \ldots f''0 = y'' - y''' x + \tfrac{1}{2} y^{IV} x^2 - \ldots \text{ u. s. w.}$$

Hieraus entnehmen wir Folgendes:

1. Im Falle die gegebene Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist, lassen sich die Derivirten y' y'' ... in Funktionen von x und y ausdrücken, so daß man in der Formel (1) das Integral bekommt, wenn man darin jene Werthe substituirt; $f0$ stellt dann die willkührliche Constante dar.

2. Ist die gegebene Differentialgleichung von der zweiten Ordnung, so erhält man die Derivirten y'', y''' ... in Funktionen von x, y und y' ausgedrückt. Indem man dann in (1) und (2) substituirt, hat man zwei Gleichungen in x, y und y', deren jede eine willkührliche Constante enthält; man nennt diese beiden Gleichungen, welche wesentlich von einander verschieden sind, die ersten Integrale der gegebenen Differentialgleichung. Die ursprüngliche Gleichung oder das zweite Integral der gegebenen Differentialgleichung würde man daher finden, indem man entweder die Derivirte y' zwischen den beiden ersten Integralen eliminirte, oder auf einem andern Wege eine endliche Relation zwischen x und y und zwei willkührlichen Constanten suchte, welche unserer Differentialgleichung genügte.

3. Dieselben Betrachtungen lassen sich auf Gleichungen von jeder Ordnung ausdehnen. Eine Differentialgleichung der $n$ten Ordnung hat n erste Integrale von der $(n-1)$ten Ordnung. Wären diese n ersten Integrale bekannt, so braucht man nur die $n-1$ Derivirten y'. y'' ... y^{n-1} zu eliminiren, um die ursprüngliche Gleichung, welche der gegebenen Differentialgleichung von der $n$ten Ordnung entspricht, zu erhalten.

Anmerkung. Eine Differentialgleichung der höhern Ordnung kann neben ihrem allgemeinen Integral noch eine besondere Auflösung zulassen, die nicht in dem allgemeinen Integral enthalten ist.

Die Differentialgleichung von der zweiten Ordnung z. B.:

$xy''^2 - 2y'y'' + x = 0$ hat zum zweiten Integral:

$$\frac{x^3}{3} + a^2x + b - 2ay = 0,$$

wo a und b willkührliche Constanten sind. Der vorgelegten Differentialgleichung genügt aber auch noch die endliche Relation $y = \frac{1}{2}x^2 + c$, welche, da sie in dem allgemeinen Integral nicht enthalten ist, eine besondere Auflösung unserer Differentialgleichung bildet.

§. 196. Wenn eine gegebene Differentialgleichung durch die bekannte Mittel nicht integrirt werden kann, so muß man das Integral näherungsweise zu bestimmen suchen. Wie die Taylor'sche Reihe sich hier anwenden läßt, haben wir in dem Vorhergehenden gesehen; sie ist jedoch nicht immer geeignet, ein genähertes Integral kennen zu lernen, es sei denn, daß man zu Transformationen seine Zuflucht nimmt, um die Funktion in einen Zustand zu versetzen, der ihre Anwendung unmittelbar gestattet.

Im Fall, daß das Integral nicht mehr nach ganzen und positiven Potenzen von x fortschreitet, hat man:

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c \;\ldots\; (1),$$

wo es jetzt darauf ankommt, die Exponenten a, b, c und die Coefficienten A, B, C ... zu bestimmen. Zu diesem Ende substituirt man den Werth von y und seinen Derivirten in die gegebene Differentialgleichung, welche wir von der ersten Ordnung annehmen wollen, und ordnet dann nach den Potenzen von x. Indem man hierauf die Gleichung zur Identität bringt, erhält man die erforderliche Anzahl von Gleichungen, um die Exponenten a, b, ... und die Coefficienten A, B ... zu bestimmen.

Beispiele. 1. Für $(1+y')y = 1$ hat man;

$(1 + Aax^{a-1} + Bbx^{b-1} + \ldots)(Ax^a + Bx^b \ldots) = 1$; woraus:

$$\left.\begin{array}{llll} A^2ax^{2a-1} & + ABax^{a+b-1} & + ACax^{a+c-1} & + \ldots \\ & + ABbx^{a+b-1} & + B^2bx^{2b-1} & + \ldots \\ & & + ACcx^{a+c-1} & + \ldots \\ -1 & + Ax^a & + Bx^b & + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Folglich: $2a-1=0$, $a+b-1=a$, $a+c-1=b=2b-1 \ldots$; d. h.

$$a=\tfrac{1}{2},\ b=1,\ c=\tfrac{3}{2}\ \ldots;\ \text{ferner:}$$

$$A^2a=1,\ AB(a+b)+A=0\ \ldots,\ \text{oder:}$$

$$A=\sqrt{2},\ B=-\tfrac{2}{3},\ C=\tfrac{1}{18}\sqrt{2}\ \ldots$$

Man findet hiernach:

$$y=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{18}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}-\ \ldots$$

Hätte man das Gesetz der Exponenten $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ ... vermuthen können, so würde man dieselben sofort in die Reihe (1) eingeführt haben, wodurch die Rechnung bedeutend einfacher geworden wäre; die Maclaurin'sche Reihe fände hierauf ihre Anwendung, wenn man $z^2=x$ machte.

2. Für die Gleichung $dy+ydx=mx^n\,dx$ findet man ebenso:

$$y=m\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\ \ldots\right).$$

Die hier gefundenen Integrale sind nicht vollständig, weil sie keine willkührlichen Constanten enthalten. Man gelangt aber zu dem vollständigen Integral, wenn man ihm eine solche Form gibt, daß für $x=a$ daraus $y=b$ hervorgeht, wo b die Stelle der willkührlichen Constante vertritt. Es läßt sich dies nun dadurch erreichen, daß man in der vorgelegten Differentialgleichung x mit $z+a$ und y mit $t+b$ vertauscht und für t eine Reihe aufstellt, deren sämmtliche Glieder verschwinden, wenn $z=0$. Es bleibt hernach nur noch übrig, statt z und t ihre Werthe $x-a$ und $y-b$ zu substituiren.

Anmerkung. Durch eine solche Transformation geht die Gleichung $dy+ydx=mx^n\,dx$ in:

$$dt+(b+t)dz=m(a+z)^n\,dz \text{ über.}$$

Hierin substituirt man:

$$t=Az^{\alpha}+Bz^{\alpha+1}+Cz^{\alpha+2}+\text{2c., was gibt:}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha Az^{\alpha-1}+(\alpha+1)Bz^{\alpha}+(\alpha+2)Cz^{\alpha+1}\ \ldots\\ +b\quad +\quad Az^{\alpha}+\quad Bz^{\alpha+1}\ \ldots\\ -ma^n-mna^{n-1}z-\dfrac{mn(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}z^2-\ \ldots\end{array}\right\}=0;$$

daraus folgt: $A=ma^n-b$, $B=\frac{mna^{n-1}-ma^n+b}{2}$,

$$C=\frac{mn(n-1)a^{n-2}-mna^{n-1}+ma^n-b}{2\cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

§. 197. Man kann auch mit Hülfe der Kettenbrüche die Integrale näherungsweise finden. Es sei:

$$y=Ax^a, Bx^b, Cx^c \ldots = \frac{Ax^a}{1+z},$$

wo die in der höhern Algebra gewählte Zeichensprache gilt und z den Rest des Kettenbruchs ausdrückt, oder $z=Bx^b, Cx^c, \ldots$ ist. Man substituire in die gegebene Differentialgleichung für y seinen Werth, indem man z vernachlässigt oder $y=Ax^a$ setzt, und behalte im Resultate nur die ersten Glieder bei, weil x als sehr klein angesehen wird; durch Vergleichung der Coefficienten und Exponenten ergibt sich dann A und a. Hierauf mache man in der vorgelegten Gleichung, $y=\frac{Ax^a}{1+z}$ und verfahre auf ähnliche Weise mit der transformirten Gleichung in z, indem man $z=Bx^b$ setzt; nachdem B und b gefunden worden, mache man $z=\frac{Bx^b}{1+t}$ in der transformirten Gleichung in z, und fahre so weiter fort.

Beispiele: 1. $my+(1+x)y'=0$ verwandelt sich, wenn man $y=Ax^a$ macht, in $(m+a)Ax^a+aAx^{a-1}=0$, was sich auf $aAx^{a-1}=0$ reducirt, weil x sehr klein ist; daraus folgt $a=0$ und A bleibt unbestimmt. Indem man $y=\frac{A}{1+z}$ setzt, hat man $m(1+z)=(1+x)z'$: woraus, wenn $z=Bx^b$ gemacht wird, man findet:

$$m+Bx^b(m-b)=bBx^{b-1} \text{ oder vielmehr}$$
$$m=bBx^{b-1}; \text{ d. h. } b=1 \text{ und } B=m.$$

Wenn man auf diese Weise fortfährt und $z=\frac{mx}{1+t}$ setzt, erhält man zum Integral folgenden Kettenbruch:

$$y=A, mx, -\tfrac{1}{2}(m-1)x, \tfrac{1}{6}(m+1)x, -\tfrac{1}{6}(m-2)x \ldots$$

Da die gegebene Gleichung das Integral $y=A(1+x)^{-m}$ liefert, so hat man hiermit die Entwicklung dieser Funktion in Form eines Kettenbruches.

2. Die Gleichung $dx=(1+x^2)dy$ gibt auf ähnliche Weise für den Bogen in Funktion seiner Tangente, folgenden Kettenbruch:

$$y=\text{arc}\,(\text{tang}=x)=x,\ \frac{x^2}{3},\ \frac{(2x)^2}{3\cdot5},\ \frac{(3x)^3}{5\cdot7},\ \frac{(4x)^2}{7\cdot9}\ \ldots$$

§. 198. Gehört eine gegebene Differentialgleichung einer Curve an, so kann es von Nutzen sein, dieselbe zu construiren, ohne ihre primitive Gleichung zu kennen; man verfährt dann wie folgt: Ist nämlich die Gleichung von der ersten Ordnung, $F(x, y, y')=0$, und entspricht dem $x=a$ der Werth $y=b$; so nehme man $AB=a$, $BC=b$ (Fig. 52) und der Punkt C wird auf der gesuchten Curve liegen. Indem man hierauf a und b statt x und y in $F=0$ setzt, bekommt man daraus für y' einen Werth, welcher die Lage der Berührenden im Punkt C bestimmt. Wird nun ein dem C hinlänglich nahe liegender Punkt D angenommen, dergestalt, daß man ohne merklichen Fehler die Gerade CD mit dem Bogen der Curve zusammenfallend betrachten kann; so werden $AF=a'$, $FD=b'$ die Coordinaten eines andern Punktes D unserer Curve sein, durch welche Coordinaten sich aus $F=0$ der entsprechende Werth von y' ergeben wird, der sich auf die nächstfolgende Berührende IE bezieht. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert uns ein Polygon CDEZ für die gesuchte Curve, von welcher dasselbe um so weniger abweicht, je mehr Seiten es enthält. Die Construktion zeigt zugleich, daß eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung unzählig viele Curven darstellt, da die Lage des Punktes C ganz willkührlich ist.

Man könnte auch auf folgende Weise zu Werke gehen. Man bestimme mittelst $F=0$ und seiner Derivirten die Werthe von y' und y'' in y und x, und substituire dieselben in den Ausdruck des Krümmungshalbmessers γ (§. 87); alsdann ziehe man die Berührende CK und errichte darauf die Normale CN gleich diesem Halbmesser, wobei a und b an die Stelle von x und y getreten sind, und beschreibe aus N als Mittelpunkt einen Kreisbogen CD, dessen Punkt D, der a' und b' zu Coordinaten hat, man als auf der Curve liegend betrachtet. Indem man von Neuem die Berührende ID und den Krümmungshalbmesser DO zieht und dies so weiter fortsetzt, wird man statt der Curve eine Reihe aufeinander folgender Kreise erhalten. Uebrigens ist es einleuchtend, daß die Abweichung zwischen diesem System von Kreisbogen und der Curve weniger beträgt als jene

zwischen der letztern und der Berührenden, weshalb man auch die Punkte C, D, E bei der zweiten Construktion weiter von einander entfernt als bei der ersten annehmen kann, wodurch das Verfahren weniger mühsam wird.

§. 199. Bei der Differentialgleichung von der zweiten Ordnung, $F(x, y, y', y'')=0$, nimmt man außer dem willkührlichen Punkt C der Curve auch eine beliebige Gerade KC als Berührende in C an; hierauf bestimmt man mittelst der gegebenen Gleichung den Werth von y'', ferner den des Krümmungshalbmessers γ in x, y und y', und beschreibt, weil diese letzten Größen für den Punkt C bekannt sind, den Kreisbogen CD, gerade wie oben. Für den Punkt D, der auf der Curve liegend angenommen wird, kennt man die Coordinaten a' und b' und den Werth von y', welcher sich aus der Lage der Berührenden in D ergibt, so daß man den dem besagten Punkt D entsprechenden Werth γ' berechnen kann. Indem man dann mit $OD=\gamma'$ den Kreisbogen DE beschreibt, erhält man einen dritten Punkt E, dessen Coordinaten und zugehörige Berührende als bekannt zu betrachten sind u. s. w.

Statt der Krümmungskreise kann man sich auch der osculatorischen Parabeln bedienen. Sind nämlich a, b die Coordinaten des willkührlichen Punktes C, so setze man $y-b=A(x-a)+B(x-a)^2$, welche Gleichung einer durch den Punkt C gehenden Parabel angehört. Die Constante A bleibt willkührlich, allein B wird bestimmt, wenn man in der gegebenen Gleichung $F=0$, a, b, A für x, y, y' setzt. Hierauf berechne man die Werthe von b' und A' der durch C gehenden Parabel für die Absciſſe a', welche wenig von a abweicht, substituire ferner diese Werthe in $F=0$, woraus ein Werth B' für y'' erfolgt. Man bildet jetzt die Gleichung:

$$y-b'=A'(x-a')+B'(x-a')^2$$

der zweiten Osculationsparabel, mit Hülfe deren eine dritte bestimmt wird und dies sofort.

Man kann das Gesagte ebenfalls auf die Differentialgleichungen der dritten Ordnung ausdehnen; allein man muß dann nicht blos einen willkührlichen Punkt C und eine beliebige Berührende OK, sondern auch noch einen willkührlichen Krümmungshalbmesser CN für diesen ersten Punkt annehmen. Auf diese Weise würde die Curve

durch ein System von osculatorischen Parabeln ersetzt, welche mit ihr eine Berührung von der dritten Ordnung eingingen.

Aehnliches läßt sich von den Differentialgleichungen der höhern Ordnungen aussagen.

Jede Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen kann also mittelst einer Curve, die eben so viele willkührliche Parameter hat, als Einheiten in der Ordnung der Gleichung enthalten sind, construirt werden. Diese geometrischen Betrachtungen stehen in völligem Einklange mit dem, was im §. 194 gesagt wurde, zufolge dessen jede Differentialgleichung, von welcher Ordnung sie auch sei, ein Integral besitzt, obschon keine Wege vorhanden sind, sie zu integriren.

Integration der Differentialgleichungen der höhern Ordnungen, insbesondere der der zweiten.

§. 200. In den Differentialgleichungen von der ersten Ordnung konnte man diese oder jene Veränderliche als Unabhängige betrachten, ohne deshalb nöthig zu haben, irgend eine Modification in dem Integrationsverfahren eintreten zu lassen. Anders verhält es sich aber mit den Gleichungen der höhern Ordnungen, wo es durchaus erforderlich ist, anzugeben, welches Differential als constant angenommen wurde, und jede Transformation, welche in dieser Beziehung die Rechnung etwa erheischt, gehörig zu berücksichtigen. Soll daher dx als constant gelten statt irgend eines andern Differentials, welches in einer gegebenen Gleichung dafür galt; so muß man zufolge der im §. 38 aufgestellten Regeln diese Gleichung zuerst darnach einrichten.

Beispiele: 1. Für:

$$ds\,dy = a d^2x \text{ oder } ax'' = y', \text{ wo } ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

constant vorausgesetzt wurde, bekommt man, wenn man ds nicht mehr als unveränderlich ansieht: $a(s'x''-x's'') = y's'^2$.

Hieraus folgt, wenn man $x'=1$ setzt:

$$x''=0;\ s'^2=1+y'^2;\ s's''=y'y'';\ y's'^2=-as'';$$

$$s'^3=-ay'' \text{ oder } (dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}=-adx\,d^2y.$$

Mit der Integration dieser letztern, auf die Form $ay''+(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=0$ gebrachten Gleichung, werden wir uns bald beschäftigen.

2. Soll dx statt ds in $(dx^2+dy^2)\frac{d^2y}{dx^4}=\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c}$, welche Gleichung mit $\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{dx^4}{ds^4}\cdot\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c}$ oder $y''=x'^4\cdot\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c}$ gleichbedeutend ist, constant werden; so hat man:

$$\frac{s'y''-s''y'}{s'^3}=\frac{x'^4}{s'^4}\cdot\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c},$$

insofern sämmtliche Derivirten als Veränderliche angesehen werden.

Macht man dann $x'=1$, so kommt $s'^2=1+y'^2$, $s's''=y'y''$; ferner:

$$y''=\frac{1}{a}\cos\frac{x}{c} \text{ oder } dy'=\frac{dx}{a}\cos\frac{x}{c}.$$

Hieraus entspringt durch Integration:

$$y'=\frac{c}{a}\sin\frac{x}{c}+b,\quad y=k+bx-\frac{c^2}{a}\cos\frac{x}{c},$$

wo k und b zwei willkührliche Constanten sind.

Uebrigens kann es zuweilen der Integration förderlich sein, statt dx irgend eine andere Veränderliche für die Unabhängige zu wählen; wir werden jedoch in der Folge, wenn wir nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerken, immer dx constant voraus setzen.

§. 201. Die Integration der Differentialgleichungen ist desto größern Schwierigkeiten unterworfen, je höher die Ordnung ist. Zuerst wollen wir einige einfache Gleichungen von der zweiten Ordnung, deren allgemeine Form $F(y'', y', y, x)=0$ ist, betrachten.

Hat man $y''=fx$, so entsteht, wegen $y''dx=dy'$, daraus $dy'=fxdx$.

Ferner hieraus:

$y'=\int fxdx+c$ und $y=\int dx\int fxdx+cx+c'$, oder, weil:
$\int dx\int fxdx=x\int fxdx-\int xfxdx$, $y=x\int fxdx-\int xfxdx+cx+c'$,

wo c und c' zwei willkührliche Constanten sind.

Beispiele: 1. Für $d^2y=adx^2$ oder $dy'=adx$ hat man zuvörderst $y'=ax+c$ und wenn man von Neuem integrirt,

$$y=c'+cx+\tfrac{1}{2}ax^2.$$

2. Für $d^2y=ax^n dx^2$ oder $y''=ax^n$ oder $dy'=ax^n dx$ findet man:

$$y=c'+cx+\frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Wenn $n=-1$ ist, erhält man $y=c'+cx+axlx$.

Wenn $n=-2$, hat man $y=c'+cx-alx$

Das obige Verfahren läßt sich ähnlicherweise auf $y^{(n)}=fx$, oder $d\cdot y^{(n-1)}=fx\cdot dx$ anwenden. Man bekommt daraus $y^{(n-1)}=c+\int fxdx$, was wieder wie das vorgelegte Differential integrirt wird: das gesuchte Integral erhält hiernach die Form:

$$y=A+Bx+Cx^2 \ldots +kx^{n-1}+\int^n fx\cdot dx^n,$$

wo A, B, C ... willkührliche Constanten sind und $\int^n$ n successive Integrationen andeutet.

§. 202. Ist die gegebene Gleichung von der Form:

$y''=fy'$, so hat man $dx=\frac{dy'}{fy'}$, weil $y''=\frac{dy'}{dx}$; ferner:

$dy=y'dx=y'\frac{dy'}{fy'}$. Die beiden Integrale:

$$x=\int\frac{dy'}{fy'}+c \text{ und } y=\int\frac{y'dy'}{fy'}+c'$$

geben durch Fortschaffung von y' die gesuchte primitive Gleichung mit zwei willkührlichen Constanten c und c'.

Beispiele: 1. Es sei $ay''+(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=0$. Man findet hier:

$$dx=-\frac{ady'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},\ dy=\frac{-ay'dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};\ \text{ferner:}$$

$$x=c-\frac{ay'}{\sqrt{(1+y'^2)}},\ y=c'+\frac{a}{\sqrt{(1+y'^2)}},\ \text{und endlich:}$$

$$(c-x)^2+(c'-y)^2=a^2.$$

Diese Integration liefert die Auflösung folgender Aufgabe: Die Curve zu finden, bei welcher der Krümmungshalbmesser γ unveränderlich ist. Der Kreis besitzt allein diese Eigenschaft.

2. Es sei $y''=\frac{a}{y'}$. Man hat hier $x=\frac{y'^2}{2a}+c$ und $y=\frac{y'^3}{3a}+c'$.

Durch Elimination von y' erhält man das gesuchte Integral:

$$8a(x-c)^3=9(y-c')^2.$$

Es läßt sich dies Verfahren auf Gleichungen von beliebiger Ordnung ausdehnen, wofern eine Derivirte durch die zunächst niedere ausgedrückt ist. Hätte man z. B. $y'''=fy''$, so mache man $dy''=y'''dx$,

mithin $\frac{dy''}{fy''}=dx$. Man zieht aus dieser letzten Gleichung $x=\int\frac{dy''}{fy''}+c$;

ferner aus der Gleichung $\frac{dy'}{dx}=y''$ nach und nach:

$$y'=\int y''dx=\int\frac{y''\,dy''}{fy''}+c',$$

$$y=\int y'\,dx=\int\frac{dy''}{fy''}\left(\int\frac{y''\,dy''}{fy'}+c'\right)+c''.$$

Es bleibt nur noch übrig, y'' zwischen den beiden Gleichungen:

$$x=\int\frac{dy''}{fy''}+c \text{ und } y=\int\frac{dy''}{fy''}\left(\int\frac{y''\,dy''}{fy''}+c'\right)+c''$$

zu eliminiren, um die primitive Gleichung mit drei willkührlichen Constanten zu erhalten.

§. 203. Man habe $y''=Fy$. Multiplicirt man:

$dy'=y''dx$ mit $y'dx=dy$, so erhält man $y'dy'=y''dy$;

woraus, wenn man für y'' seinen Werth Fy setzt und integrirt:

$$\tfrac{1}{2}y'^2=\tfrac{1}{2}c+\int Fydy,\ y'=\sqrt{(c+2\int Fydy)};\ \text{ferner:}$$

$$x=\int\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{\sqrt{(c+2\int Fydy)}}+c'.$$

Beispiele: 1. Für $a^2d^2y+ydx^2=0$ oder $a^2y''=-y$ findet man $a^2y'^2=c^2-y^2$, ferner $dx=\frac{ady}{\sqrt{(c^2-y^2)}}$; woraus durch Integration:

$$x=a\cdot\text{arc}\left(\sin=\frac{y}{c}\right)+b,\ \text{oder}\ \frac{y}{c}=\sin\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

was mit $y=c\sin\frac{x}{a}+c'\cos\frac{x}{a}$ gleichbedeutend ist.

2. Ebenso gibt $d^2y\sqrt{ay}=dx^2$ das Resultat

$\tfrac{1}{4}ay'^2=C+\sqrt{ay}$, woraus $2dx=\frac{dy\sqrt[4]{a}}{\sqrt{(c+\sqrt{y})}}$, wenn man C in $\frac{2c}{\sqrt{a}}$ verwandelt. Macht man hierauf $c+\sqrt{y}=z^2$, so folgt endlich:

$$x=\tfrac{2}{3}\sqrt[4]{a}(\sqrt{y}-2c)\sqrt{(c+\sqrt{y})}+c'.$$

Das obige Verfahren ist auf Gleichungen von einer beliebigen Ordnung anwendbar, in welchen eine Derivirte durch eine andere ausgedrückt wird, deren Ordnung um zwei Einheiten tiefer ist. Hat man z. B. $y^{IV}=Fy''$, so ist $d^2y''=Fy''dx^2$.

Hieraus entsteht nach zweimaliger Integration:

$$x=\int\frac{dy''}{\sqrt{(2\int Fy''dy''+c)}}+c' \;.\;.\;.\; (1).$$

Allein aus $\frac{dy'}{dx}=y''$ folgt nach und nach:

$$y'=\int y''dx=\int\frac{y''dy''}{\sqrt{(2\int Fy''dy''+c)}}+c'',$$

$$y=\int\frac{dy''}{\sqrt{(2\int Fy''dy''+c)}}\left(\int\frac{y''dy''}{\sqrt{(2\int Fy''dy''+c)}}+c''\right)+c'''...(2).$$

Das gesuchte Integral ist das Resultat der Elimination von y'' zwischen den Gleichungen (1) und (2) und enthält vier willkührliche Constanten.

§. 204. Es sei $F(x, y', y'')=0$, wo die Veränderliche y nicht erscheint. Setzt man $\frac{dy'}{dx}$ statt y'', so findet man eine Differentialgleichung des ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y'. Ist man nun im Stande diese Gleichung nach den gegebenen Vorschriften zu integriren und aus dem Integral y' durch x zu bestimmen, d. h. $y'=fx$ herzuleiten; so hat man zum zweiten Integral $y=\int y'dx=\int fxdx+cst.$ Ist es dagegen leichter aus dem ersten Integral x durch y' auszudrücken, d. h. daraus $x=fy'$ zu ziehen; so ergiebt sich vermittelst der theilweisen Integration:

$$y=xy'-\int xdy'=xy'-\int fy'dy'.$$

Läßt sich aber weder x durch y', noch y' durch x darstellen; so muß man suchen, beide Größen durch eine neue Veränderliche z auszudrücken. Denn aus $x=X$ und $y'=Y$ erhält man dann $y=\int YdX$.

Beispiele: 1. Die Curve zu finden, deren Krümmungshalbmesser γ der Absciße umgekehrt proportional ist. Setzt man $\gamma=\frac{a^2}{2x}$, so hat man:

$$2x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=a^2y'' \text{ oder } 2x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}dx=a^2dy'.$$

Da hier die Veränderlichen abgesondert erscheinen, so gibt die Integration:

$$x^2+c=\frac{a^2y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

Ferner $y=\int y'dx=\int\frac{(x^2+c)dx}{\sqrt{(a^4-(x^2+c^2)^2}}$,

welche Gleichung der von einem elastischen Faden gebildeten Curve angehört.

Will man, daß γ einer gegebenen Funktion X von x gleich werde; so setze man $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=Xy''$. Die nämliche Rechnung gibt dann:

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}=\int\frac{dx}{X}=V;\ \text{woraus}\ y=\int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-V^2)}}.$$

2. Es sei $1+y'^2+xy'y''=ay''\sqrt{(1+y'^2)}$.

Diese Gleichung auf die Form

$$dx(1+y'^2)+xy'dy''=ady'\sqrt{(1+y'^2)}$$

gebracht, wird integrabel, wenn man sie durch $\sqrt{(1+y'^2)}$ dividirt.

Man findet: $x=\frac{ay'+b}{\sqrt{(1+y'^2)}}$; ferner, wegen $y=y'x-\int xdy'$,

$$y=y'x-a\sqrt{(1+y'^2)}-bl\,[y'+\sqrt{(1+y'^2)}]+blc,\ \text{oder:}$$

$$y=\frac{by'-a}{\sqrt{(1+y'^2)}}-bl\left(\frac{y'+\sqrt{(1+y'^2)}}{c}\right).$$

Es bleibt nur noch übrig, y' mit Hülfe des Werthes von x daraus zu eliminiren. Man findet nach ausgeführter Rechnung, wenn man der Kürze halber $z=\sqrt{(a^2+b^2-x^2)}$ setzt:

$$y=z+bl\,\frac{x+a}{c\,(b+z)}.$$

3. Die Gleichung $2(a^2y'^2+x^2)y''=xy'$ gibt die homogene Gleichung

$$2(a^2y'^2+x^2)dy'=xy'dx.$$

Man setze daher $x=y'z$, wodurch entsteht:

$$\frac{dy'}{1y}=\frac{zdz}{2a^2+z^2}.$$

Die Integration gibt:

$$y'=c\sqrt{(2a^2+z^2)}\ \text{oder}\ x=cz\sqrt{(2a^2+z^2)}.$$

Aus $y=\int y'dx$ folgt, wenn man für y' und dx ihre Werthe in z substituirt:

$$y=\tfrac{2}{3}c^2z(3a^2+z^2)+b.$$

Um die zwischen x und y bestehende Relation zu erhalten, braucht man nur noch z zu eliminiren.

4. Aus $2y''x=y'$ folgt $cx=y'^2$. Folglich:

$$y=\tfrac{2}{3}\sqrt{(cx^3)}+c'$$

Anmerkungen. 1. Es sei $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}fx=0$. Bringt man diese Gleichung auf die Form $\frac{d^2ydx}{dy^2}+fxdx=0$, und erwägt, daß $d\left(\frac{dx}{dy}\right)=-\frac{dxd^2y}{dy^2}$; so erhält man durch Integration: $-\frac{dx}{dy}+\int fxdx=c$; woraus $y=\int\frac{dx}{\int fx\,dx-c}+c'$.

2. Es sei $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}fx=0$. Diese Gleichung auf die Form

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}}+fx\,dx=0$$

gebracht, gibt durch Integration:

$$\tfrac{1}{2}l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\int fxdx=c.\text{ folglich:}$$

$$y=e^c\int dxe^{-\int fxdx}+c'.$$

§. 205. Die Gleichung der zweiten Ordnung enthalte bloß y'', y', y, aber nicht x. Man setze $y''=\frac{y'dy'}{dy}$, dadurch verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine der ersten Ordnung zwischen y und y'. Kann man diese integriren und y' durch y darstellen, d. h. $y'=fy$ finden; so ist $x=\int\frac{dy}{y'}=\int\frac{dy}{fy}+c'$. Ließe sich bequemer y durch y' bestimmen, dergestalt, daß $y=fy'$ wird; so ist:

$$x=\int\frac{dy}{y'}=\int\frac{d\cdot fy'}{y'}=\frac{fy'}{y'}=\frac{fy'}{y'}+\int\frac{fy'}{y'^2}dy'.$$

Sollte keine dieser Bestimmungen gelingen, so versuche man y' und y durch eine neue Veränderliche z auszudrücken, so daß $y'=Z$ und $y=T$ werde, wo Z und T Funktionen von z sind: man hat alsdann:

$$x=\int\frac{dT}{Z}.$$

Beispiele: 1. Die Gleichung $y''(yy'+a)=y'(1+y'^2)$ verwandelt sich in:

$$dy'(yy'+a)=dy(1+y'^2) \text{ oder:}$$

$$dy-\frac{y'ydy'}{1+y'^2}=\frac{ady'}{1+y'^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt:

$$y=ay'+c\sqrt{(1+y'^2)}. \text{ Ferner ist:}$$

$$x=\int\frac{dy}{y'}=al(c'y')+cl\,[y'+\sqrt{(1+y'^2)}].$$

Zwischen diesen beiden Gleichungen bleibt nur noch y' zu eliminiren übrig. Setzt man die Constante $c=0$, so findet man das besondere Integral $y=ay'$ und $x=al\,(c'y')$; woraus $y=C\cdot e^{\frac{x}{a}}$.

2. Es sei $y'^2+2y''y'=0$. Daraus:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{2dy'}{y'}; \text{ ferner } y'=\sqrt{\left(\frac{c}{y}\right)}. \text{ Folglich } x=\frac{2}{3\sqrt{c}}\,y^{\frac{3}{2}}+c'.$$

3. Die Gleichung $aby''=\sqrt{(y^2+a^2y'^2)}$ geht in

$$aby'dy'=dy\sqrt{(y^2+a^2y'^2)} \text{ über.}$$

Wegen der Homogenität, setze man $y'=\frac{y}{z}$; man bekommt dadurch $abzdy-abydz=z^2dy\sqrt{(z^2+a^2)}$. Macht man $\sqrt{(a^2+z^2)}=tz$, so wird:

$$\frac{dy}{y}=\frac{-btdt}{bt^2-at-b}.$$

Es läßt sich hiernach y wie y' durch t darstellen. Ist daher $y=T$, so wird:

$$x=\int\frac{dy}{y'}=\int\frac{adT}{T\sqrt{(t^2-1)}}.$$

Nach ausgeführter Integration schreitet man endlich zur Elimination von t.

4. Es sei $y''+Ay'+By=0$, wo A und B constante Größen sind. Es entsteht daraus die homogene Gleichung:

$$y'dy'+Ay'dy+Bydy=0.$$

Macht man daher $y'=yu$, so ergibt sich:

$$\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{yu}=\frac{-du}{u^2+Au+B}=\frac{-du}{(u-a)(u-b)},$$

wenn durch a und b die Wurzeln von $u^2+Au+B=0$ dargestellt werden.

Wegen $dy = y'dx$ findet man:

$$\frac{dy}{y} - adx = \frac{-du}{u-b},\ \frac{dy}{y} - bdx = \frac{-du}{u-a};$$ folglich;

$$ly - ax = l\left(\frac{m}{u-b}\right),\ ly - bx = l\left(\frac{n}{u-a}\right).$$ Hieraus:

$$u - b = \frac{m}{y} e^{ax},\ u - a = \frac{n}{y} e^{bx};$$ woraus, wenn man abzieht:

$y(b-a) = -me^{ax} + ne^{bx}$, oder, wenn man die Constanten verändert: $y = Ce^{ax} + De^{bx}$.

Sind a und b imaginär, oder $a = k - h\sqrt{-1}$, $b = k + h\sqrt{-1}$; so findet man, wenn man diese Werthe einführt:

$$y = e^{kx}(Ce^{-hx\sqrt{-1}} + De^{hx\sqrt{-1}})$$

Daraus erfolgt, wenn man erwägt, daß:

$$e^{hx\sqrt{-1}} = \cos hx + \sqrt{-1}\sin hx$$ und
$$e^{-hx\sqrt{-1}} = \cos hx - \sqrt{-1}\sin hx$$ ist,

nach Aenderung der Constanten:

$$y = e^{kx}(C'\cos hx + D'\sin hx) = C''e^{kx}\cos(hx + f).$$

Für $a = b$ erhält man, wenn die Rechnung noch einmal gemacht wird:

$$\frac{dy}{y} = \frac{-udu}{(u-a)^2};$$ woraus $y(u-a) = ce^{\frac{a}{u-a}}$.

Es ist aber $dx = \frac{dy}{1y} = \frac{dy}{yu} = \frac{-du}{(u-a)^2}$; daraus $u - a = \frac{1}{x+k}$.

Eliminirt man $u-a$, so findet man endlich:

$$y = ce^{a(x+k)}(x+k) = Ce^{ax}(x+k).$$

Anmerkungen: 1. Es sei $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}\cdot fy = 0$. Die Gleichung auf die Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dy}{dx}} + fydy = 0$ gebracht, gibt durch Integration

$$\tfrac{1}{2} l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \int fydy = c,$$ oder $\frac{dy}{dx} = e^c e^{-\int fydy}$; folglich:

$$x = e^c \int dy e^{\int fydy} + c'.$$

2. Die Gleichung

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot fy = 0$ folgendermaßen $d\left(\frac{dy}{dx}\right) + fydy = 0$ geschrieben,

wenn man sie integrirt, liefert:

$$\frac{dy}{dx}+\int fy\,dy=c;\ \text{folglich}\ x=\int\frac{dy}{c-\int fy\,dy}+c'.$$

§. 206. Die Gleichung $y''+Py'+Qy=0$, wo P und Q beliebige Funktionen von x sind, läßt sich vermittelst einer leichten Transformation integriren. Denn macht man:

$$y=e^{\int udx},\ \text{so ist}\ y'=ue^{\int udx},\ y''=e^{\int udx}(u'+u^2);\ \text{woraus:}$$

$$u'+u^2+Pu+Q=0,$$

weil der gemeinsame Faktor $e^{\int udx}$ verschwindet. Von der Auflösung dieser Gleichung der ersten Ordnung hängt mithin die Integration der vorgelegten Differentialgleichung der zweiten Ordnung ab. Wenn P und Q constant wären, so könnte man u constant annehmen; man hätte dann $u'=0$, und es bliebe zur Bestimmung von u die Gleichung $u^2+Pu+Q=0$ übrig. Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit a, b, so hat man:

$$\int udx=ax+m,\ \text{oder}\ =bx+n,\ \text{und}\ y=e^{ax+m}=Ce^{ax},\ \text{oder}\ y=e^{bx+n}=De^{bx},$$

Addirt man die gefundenen Werthe der Funktion y, so bekommt man das vollständige Integral:

$$y=Ce^{ax}+De^{bx}.$$

Sind die Wurzeln von $u^2+Pu+Q=0$. imaginär oder $u=k\pm h\sqrt{-1}$; so nimmt unser Integral, wie wir oben gesehen haben, die Form $y=Ce^{kx}\cos(hx+f)$ an.

Sind die Wurzeln einander gleich, so muß man die Gleichung $du+(u-a)^2dx=0$ integriren, was $u-a=\frac{1}{x+k}$ gibt; hieraus:

$$\int udx=l(x+k)+ax+D,\ y=e^{\int udx}=Ce^{ax}(x+k).$$

Man erhält demnach die schon gefundenen Resultate wieder.

Anmerkungen: 1. Kennt man zwei besondere Werthe y_1 und y_2, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0\ \text{genügen,}$$

so wird das gesuchte Integral derselben sein:

$$y=c_1y_1+c_2y_2,$$

wo c_1 und c_2 zwei willkührliche Constanten sind. Denn es ist:

$$\frac{dy}{dx}=c_1\frac{dy_1}{dx}+c_2\frac{dy_2}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=c_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+c_2\frac{d^2y_2}{dx^2};$$

Folglich:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=c_1\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+P\frac{dy_1}{dx}+Qy_1\right)$$

$$+c_2\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+P\frac{dy_2}{dx}+Qy_2\right)=0,$$

weil, nach der Voraussetzung, sowohl der Faktor von c_1 als der von c_2 jeder für sich verschwindet. Man sieht bald ein, daß dieser Satz auf die allgemeine Gleichung von einer beliebigen Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^2}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\ldots+Uy=0$$

ausgedehnt werden kann, daß mithin, wenn n besondere Integrale $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ gefunden sind, welche ihr genügen, das vollständige Integral derselben ist:

$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+c_n y_n$, wo $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkührliche Constanten sind.

2. Ist ein besonderes Integral z von y bekannt, so setze man $y=zt$, wo t eine noch unbestimmte Funktion von x darstellt. Man hat dann:

$\frac{dy}{dx}=t\frac{dz}{dx}+z\frac{dt}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=t\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dt}{dx}+z\frac{d^2t}{dx^2}$; folglich:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy$$

$$=t\left(\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}+Qz\right)+2\frac{dz}{dx}\frac{dt}{dx}+z\frac{d^2t}{dx^2}+Pz\frac{dt}{dx}$$

$=2\frac{dz}{dx}\frac{dt}{dx}+z\frac{d^2t}{dx^2}+Pz\frac{dt}{dx}$, weil nach der Voraussetzung:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}+Qz=0.$$

Die Funktion t muß daher dergestalt bestimmt werden, daß:

$$2\frac{dz}{dx}\frac{dt}{dx}+z\frac{d^2t}{dx^2}+Pz\frac{dt}{dx}=0 \text{ ist.}$$

Setzt man zu diesem Ende $\frac{dt}{dx}=u$, so kommt:

$$Pdx+\frac{du}{u}+2\frac{dz}{z}=0; \text{ woraus:}$$

$$\int Pdx=\log\frac{c}{z^2u}.$$

Also $$t=c'+c\int\frac{dx}{z^2}e^{-\int Pdx},$$ und endlich:

$$y=c'z+cz\int\frac{dx}{z^2}e^{-\int Pdx},$$

welches das gesuchte Integral ist.

§. 207. Die Integration der Differentialgleichung:

$$y''+Py'+Qy=R,$$

worin P, Q, R Funktionen von x sind, läßt sich auf die Integration der im vorigen Paragraphen betrachteten Differentialgleichung zurückführen. Man setze nämlich auf ähnliche Weise, wie im §. 157 geschehen ist, $y=tz$, wo t und z noch unbestimmte Funktionen von x sind; hieraus folgt:

$$y'=tz'+zt',\ y''=tz''+2z't'+zt''.$$

Substituirt man diese Werthe in die gegebene Gleichung und zerfällt die daraus resultirende in zwei andere, was wegen der Variabeln z und t gestattet ist; so hat man:

$$z''+Pz'+Qz=0\ \ldots\ (1);$$ und:

$$t''+t'\left(P+\frac{2z'}{z}\right)=\frac{R}{z},$$ oder:

$$dt'+t'\left(P+\frac{2z'}{z}\right)dx=\frac{Rdx}{z}\ \ldots\ (2).$$

Man bestimme nun nach dem vorigen Paragraphen z aus der Gleichung (1), ferner t aus der Gleichung (2). Diese letzte läßt sich nach §. 175 behandeln, wenn man y mit t', P mit $P+\frac{2z'}{z}$, Q mit $\frac{R}{z}$ vertauscht. Man erhält auf diese Art, $u=\int Pdx+2lz$,

$$e^u=e^{\int Pdx}e^{lz^2}=\varphi\cdot z^2,$$ wenn man der Kürze halber

$$\varphi=e^{\int Pdx}\ \ldots\ (3)$$ setzt. Folglich:

$$\varphi z^2t'=\int R\varphi zdx;$$ ferner:

$$y=tz=z\int\left(\frac{dx}{\varphi z^2}\right)\int R\varphi zdx\Big)\ \ldots\ (4).$$

Da die in diesem Resultat vorkommende doppelte Integration zwei willkührliche Constanten enthält, so wird das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung gefunden, wenn man statt z und φ solche Funktionen von x wählt, welche den Gleichungen (1) und (3) genügen.

Beispiele: 1. Für die Gleichung:

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{a}{x^2-1}, \text{ wo } P = \frac{1}{x}, \; Q = -\frac{1}{x^2}, \; R = \frac{a}{x^2-1}$$

verwandelt sich die Gleichung (1) in:

$$z^2 + \frac{z'}{x} = \frac{z}{x^2}, \text{ woraus } du + \left(u^2 + \frac{u}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = 0, \text{ weil } z = e^{\int u dx}.$$

Diese Gleichung wird homogen, wenn man $u = v^{-1}$ setzt, hierauf integrirbar, wenn man $x = vs$ macht. Man findet so:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{s^2+s-1}{s(s^2-1)}ds; \text{ hieraus } v = \frac{1}{s}\sqrt{\left(\frac{s+1}{s-1}\right)},$$

wo keine Constante hinzugefügt wurde. Substituirt man statt v und s ihre Werthe u^{-1} und ux, so erhält man:

$$u = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}, \int u dx = l\frac{x^2-1}{x}, \; z = e^{\int u dx} = \frac{x^2-1}{x}.$$

Die Gleichung (3) gibt ferner $\varphi = x$, woraus:

$$\int R\varphi z dx = \int a dx = ax + b;$$

die Gleichung (4) wird endlich:

$$y = \frac{x^2-1}{x}\int\frac{(ax+b)x dx}{(x^2-1)^2}, \text{ oder:}$$

$$y = -\frac{ax+b}{2x} + \frac{x^2-1}{4x} \; al\left(c\frac{(x-1)}{x+1}\right).$$

2. Für $y'' - \frac{a^2-1}{4x^2}y = \frac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}$ wird die Gleichung (1) $z'' - \frac{a^2-1}{4x^2}z = 0$. Derselben geschieht Genüge, wenn man $z = \sqrt{(x^{a+1})}$ macht. Uebrigens ist $\varphi = 1$, ferner $\int R\varphi z dx = \int m dx = mx + b$; folglich:

$$y = z\int\frac{(mx+b)dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{a-1}}}\left(cx^a - \frac{b}{a} - \frac{mx}{a-1}\right).$$

Anmerkung. Die Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Ady}{dx} + By = R,$$

wo A und B constant sind und R eine Funktion von x ist, hängt von der Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{Adz}{dz} + Bz = 0$$

ab, welcher Genüge geschieht, wenn man $z = e^{ax}$ setzt, wo

eine Wurzel von $u^2+Au+B=0$ ist. Dadurch wird im vorliegenden Falle:

$$t'=e^{-\int(A+2a)x}\left(\int e^{(A+a)x}Rdx+C\right).$$

Weil aber, wenn b die zweite Wurzel von $u^2+Au+B=0$ bezeichnet,

$A=-a-b$, $A+2a=a-b$, $A+a=-b$ ist; so hat man:

$t'=e^{(a-b)x}\left(\int e^{-bx}Rdx+C\right)$; hieraus:

$t=\int e^{-(a-b)x}dx\int e^{-bx}Rdx+C\int e^{-(a-b)x}dx+c'$.

Sind die beiden Wurzeln a und b ungleich, so bekommt man:

$$t=\frac{\int e^{-ax}Rdx-e^{-(a-b)x}\int e^{-bx}Rdx-Ce^{-(a-b)x}}{a-b}+c'; \text{ also:}$$

$$y=\frac{e^{ax}\int e^{-ax}Rdx-e^{bx}\int e^{-bx}Rdx-Ce^{bx}}{a-b}+c'e^{ax}\ \ldots\ (5).$$

Für den Fall, wo $a=b$, hat man:

$A+2a=0$ und $A+a=-a$, mithin auch:

$t'=\int e^{-ax}Rdx+C$, und $t=\int dx\int e^{-ax}Rdx+Cx+C'$, oder:

$t=x\int e^{-ax}Rdx-\int e^{-ax}Rxdx+Cx+C'$; folglich:

$y=e^{ax}\left(x\int e^{-ax}Rdx-\int e^{-ax}Rxdx\right)+e^{ax}(Cx+C')$.

Für den Fall, wo die Wurzeln imaginär und von der Form $k\pm h\sqrt{-1}$ sind, hat man:

$$e^{ax}=e^{kx}(\cos hx+\sqrt{-1}\sin hx) \text{ und}$$
$$e^{bx}=e^{kx}(\cos hx-\sqrt{-1}\sin hx).$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck (5), so erhält man nach Veränderung der Constanten:

$$y=e^{kx}(C\cos hx+C'\sin hx)+e\frac{e^{kx}}{b}\left(\begin{array}{l}\sin hx\int e^{-kx}Rdx\cos hx\\ -\cos hx\int e^{-kx}Rdx\sin hx\end{array}\right).$$

§. 208. Eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung heißt homogen, wenn die Summe der Exponenten in allen Gliedern der Gleichung dieselbe ist, wobei nicht bloß den Veränderlichen x und y, sondern auch den Differentialen dx, dy und d^2y nur eine Dimension beigelegt wird, wie dies der Fall ist bei der Gleichung:

$$x^3d^2y+xydx^2+y^2dy^2=0,$$

wo in jedem Gliede vier Dimensionen erscheinen.

Setzt man nun $\frac{dy}{dx}=y'$ und $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=y''$, so ist y' als eine Größe, die keine Dimension, y'' aber als eine Größe anzusehen, die

eine negative Dimension hat. Eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung wird daher homogen sein, wenn sie, auf die Form gebracht, worin sie nur die Größen x, y, y' und y'' enthält, in ihren einzelnen Gliedern dieselbe Anzahl von Dimensionen besitzt, wobei der Veränderlichen x und y eine Dimension, der Größe y' keine und der Größe y'' eine negative Dimension beigelegt wird. Macht man daher in einer solchen zwischen x, y, y' und y'' gegebenen homogenen Gleichung:

$$y = ux, \; y''x = z \; \ldots \; (1),$$

so werden alle Glieder derselben die nämliche Potenz von x zum Faktor bekommen, dergestalt daß, wenn man diese Potenz durch Division wegschafft, man eine Gleichung zwischen den Größen u, y' und z erhalten wird, aus welcher man $z = f(y', u)$ herleiten kann.

Es ist nun: $dy = y'dx = udx + xdu$, $xdy' = zdx$, woraus:

$$(2) \; \ldots \; \frac{dx}{x} = \frac{du}{y' - u} \text{ und } \frac{dy'}{z} = \frac{du}{y' - u} \; \ldots \; (3).$$

Substituirt man in die letzte Relation statt z seinen Werth $f(y', u)$, so erhält man eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen y' und u; kann man dann dieselbe integriren und daraus $y' = \varphi u$ gewinnen, so schreite man zur Integration der Gleichung (2), in welcher die Veränderlichen x und u abgesondert erscheinen. Indem man endlich in das letzte Integral $\frac{y}{x}$ statt u setzt, erhält man die gesuchte Gleichung zwischen x und y, in der zwei willkührliche Constanten vorkommen.

Anmerkung. Die Integration einer homogenen Differentialgleichung der zweiten Ordnung ist also von der Integration der einfachen Differentialgleichung:

$$zdu = y'dy' - udy' \; \ldots \; (3) \text{ abhängig.}$$

Fälle, in denen dieselbe sofort eine Integration zuläßt, sind folgende:

1. Wenn z eine homogene Funktion des ersten Grades von y' und u ist, weil dann die Gleichung (3) selbst homogen wird.
2. Wenn z eine Funktion von y' ist, weil man dann die lineäre Gleichung $du + \frac{udy'}{z} = \frac{y'dy'}{z}$ hat.

3. Wenn z eine Funktion von $y'-u$ ist, weil, wenn $y'-u=t$ gesetzt wird, die Gleichung (3) in $zdu=tdu+tdt$ übergeht; hieraus entsteht $u=\int \frac{tdt}{z-t}$, welches Integral zu den einfachen Formeln zu zählen ist.

Beispiele: 1. $xd^2y=dydx$ oder $xy''=y'$ gibt $z=y'$ und die Gleichung (3) wird $dy'(y'-u)=y'du$; woraus:

$$\tfrac{1}{2}y'^2=\int(udy'+y'du)=y'u+\tfrac{1}{2}c.$$

Aus $\frac{dx}{x}=\frac{dy'}{y'}$ entsteht $x=ay'$, so daß, wenn man y' aus diesen beiden Integralen eliminirt, kommt: $x^2-2axu=C$. Schafft man endlich y fort, so erhält man das gesuchte Integral $x^2-2ay=C$.

2. Für $x^2d^2y=xdxdy+aydx^2$ hat man $z=y'+au$, so daß die Gleichung (3) in die homogene $(y'-u)dy'=(y'+au)du$ übergeht. Durch Integration findet man $y'=u+\sqrt{[c+(a+1)u^2]}$. Hiernach ist:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{[c+(a+1)u^2]}},$$

woraus, wenn man von neuem integrirt:

$$lx=\frac{1}{\sqrt{(n+1)}}l(u\sqrt{(a+1)}+\sqrt{[c+(a+1)u^2]})+c', \text{ wobei } u=\frac{y}{x} \text{ ist.}$$

§. 209. Es sei die Differentialgleichung von der nten Ordnung, $Ay+By'+\ldots Ky^{(n)}=0$, wo A, B, C ... constante Größen sind. Setzt man $y=ce^{hx}$, so wird man, wenn in die gegebene Gleichung gehörig substituirt und dann durch e^{hx} dividirt wird, zum folgenden Resultate gelangen:

$$A+Bh+Ch^2\ldots Kh^n=0\ldots (M),$$

woraus der Exponent h bestimmt werden kann. Da dieser n Werthe zuläßt, welche wir mit h, k, l ... bezeichnen wollen; so erhält man die n Formeln:

$$y=ce^{hx},\ y=c'e^{kx}\ldots,$$

welche unserer Differentialgleichung Genüge leisten. Das gesuchte vollständige Integral derselben wird daher sein:

$$y=ce^{hx}+c'e^{kx}+c''e^{lx}\ldots (N).$$

Kommen imaginäre Wurzeln vor, so erhält man aus der Verbindung zweier zusammengehörigen $h=a\pm b\sqrt{-1}$ derselben, den

Ausdruck $e^{ax}(ce^{bx\sqrt{-1}}+c'e^{-bx\sqrt{-1}})$,
der sich unter folgender Form darstellen läßt:

$$e^{ax}(m\cos bx+n\sin bx)=Ke^{ax}\sin(bx+l).$$

§. 210. Besitzt die Gleichung (M) gleiche Wurzeln, so ist (N) kein vollständiges Integral mehr. Für $h=k$ z. B. vereinigen sich die beiden ersten Glieder von (N) in $(c+c')e^{hx}$, wo $c+c'$ blos für eine einzige Constante zählt, so daß nur noch $n-1$ willkührliche Constanten vorhanden sind.

Werden sämmtliche Wurzeln einander gleich, so ist die vorgelegte Gleichung von der Form:

$$h^n y-nh^{n-1}y'+\tfrac{1}{2}n(n-1)h^{n-2}y'' \ldots \pm y^{(n)}=0 \ldots (P),$$

weil alsdann (M) auf $(h-h)^n=0$ zurückkommt. Es sei nun $y=ut$, woraus $y'=ut'+tu'$, $y''=ut''+2t'u'+u''t$, u. s. w. Macht man dann $t=e^{hx}$, so findet man, weil $t'=he^{hx}=ht$, $t''=h^2t \ldots t^{(i)}=h^i t$:

$$y=ut,\ y'=t(hu+u'),\ y''=t(h^2u+2hu'+u'') \ldots,$$
$$y^{(i)}=t(h^i u+ih^{i-1}u'+\tfrac{1}{2}i(i-1)h^{i-2}u'' \ldots +u^{(i)}).$$

Durch die Substitution dieser Werthe in (P) erhalten wir eine Gleichung, deren sämmtliche Glieder, das letzte $u^{(n)}$ ausgenommen, sich gegenseitig aufheben, es ist folglich $u^{(n)}=0$, und daraus:

$$u=a+bx+cx^2 \ldots +fx^{n-1}.$$

Das vollständige Integral ist daher:

$$y=ut=(a+bx+cx^2 \ldots +fx^{n-1})e^{hx}.$$

Besitzt die Gleichung (M) m Wurzeln $=\alpha$, so hat sie $(h-\alpha)^m$ unter der Gestalt $h^m+Ah^{m-1}+\ldots+\alpha^m$ zum Faktor, dem die Differentialgleichung von der mten Ordnung $h^my+Ah^{m-1}y' \ldots \pm y^{(m)}=0$ entspricht, deren allgemeines Integral $y=(a+bx+cx^2 \ldots +fx^{m-1})e^{\alpha x}$ ist. Außerdem sind die Formeln $y=ce^{hx}$, $y=c'e^{kx} \ldots$ besondere Integrale der gegebenen Differentialgleichung, wo $h, l \ldots$ die $n-m$ ungleichen Wurzeln der Gleichung (M) bezeichnen. Das Aggregat aller dieser Werthe, nämlich der Ausdruck:

$$y=(a+bx \ldots +fx^{m-1})e^{\alpha x}+ce^{hx}+c'e^{kx} \ldots,$$

worin $a, b, \ldots f, c, c' \ldots$ willkührliche Constanten und $\alpha, h, l \ldots$ die Wurzeln der Gleichung (M) sind, wird daher der gegebenen Differentialgleichung ebenfalls Genüge leisten und ihr vollständiges

Integral sein, weil es eben so viele Constanten enthält, als ihr Ordnungsexponent anzeigt.

Beispiele. 1. Es sei $y-2y'+2y''-2y'''+y^{IV}=0$.

Wir finden die algebraische Gleichung:

$$1-2h+2h^2-2h^3+h^4=(1-h)^2(1+h^2)=0.$$

Das vollständige Integral wird demnach:

$$y=e^x(a+bx)+A\cos x+B\sin x.$$

2. Ebenso entspricht der Gleichung:

$$a^4y+2a^2y''+y^{IV}=0.$$

das vollständige Integral:

$$y=(A+Bx)\cos ax+(C+Dx)\sin ax.$$

§. 211. Es sei die Differentialgleichung von der nten Ordnung:

$$Ay+By'+Cy''+Dy''' \;.\;.\;.\; Ny^{(n)}=X,$$

bei welcher X irgend eine Funktion von x und A, B, C . . . constante Größen sind. Multiplicirt man unsere Gleichung mit $e^{hx}dx$, so muß, weil das zweite Glied $Xe^{hx}dx$ integrabel ist, der Ausdruck:

$$(Ay+By'+Cy'' \;.\;.\;.\; Ny^{(n)})e^{hx}dx$$

ebenfalls integrabel sein. Man nehme an, daß das Integral desselben sei:

$$e^{hx}(A'y+B'y'+ \;.\;.\;.\; M'y^{(n-1)});$$

das Differential hievon, nämlich:

$$e^{hx}dx\begin{pmatrix}hA'y+hB'y'+ \;.\;.\;.\; +hM'y^{(n-1)}\\ +A'y'+B'y'' \;.\;.\;.\; +M'y^{(n)}\end{pmatrix}$$

wird dann mit dem vorigen Ausdruck übereinstimmen.

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$A'=\frac{A}{h};\; B'=\frac{B-A'}{h};\; C'=\frac{C-B'}{h};\;.\;.\;.\; \text{und } M'=N; \text{ oder:}$$

$$A'=\frac{A}{h};\; B'=\frac{B}{h}-\frac{A}{h^2};\; C'=\frac{C}{h}-\frac{B}{h^2}+\frac{A}{h^2}\;.\;.\;.; \text{ und:}$$

$$A-Bh+Ch^2-Dh^3+Eh^4 \;.\;.\;.\;.\; \pm Nh^n=0.$$

Die vorgelegte Gleichung ist hiernach durch Integration auf folgende, um eine Ordnung niedrigere Gleichung zurückgeführt:

$$\int e^{hx}Xdx=e^{hx}(A'y+B'y'+ \;.\;.\;.\; M'y^{(n-1)}),$$

welche eine ähnliche Form wie die gegebene Gleichung selbst hat,

mithin nach derselben Methode von Neuem integrirt werden kann. Auf diese Weise fortgefahren, wird man endlich zu der ursprünglichen zwischen x und y bestehenden Relation gelangen.

Anstatt dergleichen successiven Integrationen vorzunehmen, kann man auch folgenden Weg einschlagen. Man suche die ungleichen Wurzelwerthe von h aus $A - Bh + Ch^2 + \ldots \pm Nh^n = 0$, bestimme dann für diese einzelnen Werthe die Größen $A' = \frac{A}{h}$, $B' = \frac{B - A'}{h}$ u. s. w., was eben so viele erste Integrale von der Form:

$$A'y + B'y' + C'y'' \ldots + M'y^{(n-1)} = e^{-hx}(P + c),$$

wo $P = \int Xe^{hx}dx$ und c eine willkührliche Constante bedeutet. Eliminirt man hierauf mittelst dieser ersten Integrale eine gleiche Anzahl von den Größen $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)} \ldots$, so erhält man statt der vorgelegten eine Differentialgleichung, deren Ordnung um eben so viele Einheiten niedriger ist, als man Wurzeln von h kennt, mithin das vollständige Integral selbst, wenn diese n Wurzeln sämmtlich von einander verschieden sind.

Von der Elimination bei mehreren gleichzeitig gegebenen linearen Differentialgleichungen.

§. 212. Wenn man zwei Gleichungen zwischen x, y und t hat, so führt die Elimination von t auf eine Relation zwischen x und y; kommen aber in den gegebenen Gleichungen Differentiale vor, so erfordert der Calcül anderweitige Methoden, um dahin zu gelangen. Es seien die beiden linearen Gleichungen von der ersten Ordnung zwischen drei Veränderlichen:

$$(M\,x + N\,y)dt + P\,dx + Q\,dy = \tau\,dt,$$
$$(M_{,}x + N_{,}y)dt + P_{,}dx + Q_{,}dy = \tau_{,}dt.$$

Schafft man successive dy und dx fort und befreit dasjenige Differential, welches man beibehält, von seinen Coefficienten; so nehmen unsere Gleichungen nachstehende Form an:

$$dx + (P\,y + Q\,x)\,dt = \tau\,dt \;\ldots\; (1),$$
$$dy + (P_{,}y + Q_{,}x)\,dt = \tau_{,}dt \;\ldots\; (2),$$

wo P, Q, $P_{,}$, $Q_{,}$, τ und $\tau_{,}$ neue Funktionen von t vorstellen. Unter dieser Gestalt, wo wir P, Q, $P_{,}$ und $Q_{,}$ constant voraussetzen,

mithin die Gleichungen (1) und (2) von der Form:

$$(ax+by)dt+dx=rdt \text{ und } (a'x+b'y)dt+dy=r_{,}dt$$

sind, hat D'Alembert diese gleichzeitigen Differentialgleichungen vermittelst folgender sinnreichen Methode behandelt. Multiplicirt man nämlich die zweite Gleichung mit einer unbestimmten Größe k und addirt das Produkt zu der erstern; so hat man:

$$(a+a'k)\left(x+c\,\frac{b+b'k}{a+a'k}\,y\right)dt+(dx+kdy)=(r+r_{,}k)dt.$$

Das zweite Glied $dx+kdy$ würde nun offenbar das Differential des erstern sein, von dem Faktor $(a+a'k)dt$ abgesehen, wenn man $k=\frac{b+b'k}{a+a'k}$ oder $a'k^2+(a-b')k=b$ hätte.

Nimmt man daher statt k eine dieser Wurzeln, so bekommt man:

$$(a+a'k)(x+ky)dt+dx+kdy=(r+r_{,}k)dt, \text{ oder:}$$

$$du+(a+a'k)udt=(r+r_{,}k)dt,$$

wenn man $x+ky=u$ macht. Es ist leicht, diese lineäre Gleichung zu integriren und den Werth von u in Funktion von t oder $x+ky=ft$ daraus herzuleiten. Setzt man dann nach und nach für k seine beiden Wurzelwerthe, so erhält man zwischen den Veränderlichen x, y und t zwei primitive Gleichungen, aus denen noch t zu eliminiren übrig bleibt.

Sind die Wurzeln von k imaginär, so führt man, wie schon früher geschehen, statt der Exponentialgrößen ihre trigonometrischen Ausdrücke ein.

Sind gedachte Wurzeln einander gleich, so hat man in der That nur eine zwischen x, y und t bestehende Relation; allein im vorliegenden Falle wird man daraus den Werth einer dieser Veränderlichen suchen und denselben in eine der vorgelegten Gleichungen substituiren, worauf man die dadurch zwischen zwei Veränderlichen erhaltene Gleichung von Neuem zu integriren hat.

Anmerkung. In dem Fall, wo die Coefficienten P, Q, $P_{,}$, $Q_{,}$ nicht constant sind, multiplicirt D'Alembert die Gleichung (1) mit einer unbestimmten Funktion ϑ von t, und addirt das Produkt zur Gleichung (2). Man erhält dadurch, wenn statt y eine neue Veränderliche z mittelst der Relation $y=z-\vartheta x$ eingeführt wird:

$$dz+(P+P_{,}\vartheta)zdt-x[d\vartheta+(P+P_{,}\vartheta)\vartheta dt-(Q+Q_{,}\vartheta)dt]=(T+T_{,}\vartheta)dt.$$

Setzt man den Multiplikator von x gleich Null, was erlaubt ist, weil man über ϑ nach Belieben verfügen kann: so zerfällt unsere Gleichung in die beiden folgenden:

$$dz+(P+P_{,}\vartheta)z\,dt=(T+T_{,}\vartheta)dt,$$
$$d\vartheta+(P+P_{,}\vartheta)\vartheta dt-(Q+Q_{,}\vartheta)dt=0,$$

deren letztere nur noch die beiden Veränderlichen ϑ und t enthält. Könnte man diese zweite integriren, so gäbe die erstere sofort z dazu, wodurch $y=z-\vartheta x$ in eine primitive Gleichung zwischen y, x, t mit zwei willkührlichen Constanten überginge. Eine andere primitive Gleichung zwischen diesen Variabeln würde man sich aus der Relation (2) ohne weitere Integration verschaffen.

§. 213. Hat man drei lineäre Gleichungen zwischen vier Veränderlichen z, x, y und t von der ersten Ordnung, so kann man sie auf folgende Form bringen:

$$dz+(P\,z+Q\,x+R\,y)dt=T\,dt \quad . \; . \; . \; (1),$$
$$dx+(P_{,}z+Q_{,}x+R_{,}y)dt=T_{,}dt \quad . \; . \; (2),$$
$$dy+(P_{,,}z+Q_{,,}x+R_{,,}y)dt=T_{,,}dt \quad . \; . \; . \; (3).$$

Beschränken wir uns auf den Fall, wo die Coefficienten von z, y und x constant sind, mithin unsere Gleichungen die Form haben:

$$(a\,x+by\;+cz\;)dt+dx=T\,dt,$$
$$(a'\,x+b'y\;+c'z\;)dt+dy=T_{,}dt,$$
$$(a''x+b''y+c''z)dt+dz=T_{,,}dt.$$

Wir multipliciren die zweite Gleichung mit der unbestimmten Größe k, die dritte mit der unbestimmten Größe l und addiren die Produkte zur ersten; es gibt uns dies folgendes Resultat:

$$(a+a'k+a''l)\left[x+\frac{b+b'k+b''l}{a+a'k+a''l}y+\frac{c+c'k+c''l}{a+a'k+a''l}z\right]dt$$
$$+dx+kdy+ldz=(T+T_{,}k+T_{,,}l)dt.$$

Das Differential des zwischen den Klammern eingeschlossenen Theils ist $dx+kdy+ldz$, wenn man l und k den Bedingungen gemäß:

$$\frac{b+b'k+b''l}{a+a'k+a''l}=k,\;\frac{c+c'k+c''l}{a+a'k+a''l}=l \text{ bestimmt.}$$

Macht man daher $x+ky+lz=u$, so hat man:

$$(a+a'k+a''l)u\,dt+du=(T+T_{,}k+T_{,,}l)dt.$$

Durch Integration dieser letztern Gleichung erhält man u in t ausgedrückt, oder $x+ky+lz=ft$. Da die Bestimmung von k und l zu einer Gleichung führt, worin die Unbekannte auf den dritten Grad steigt; so werden, wenn man nach und nach diese drei Werthe in das Integral substituirt, drei Gleichungen zwischen x, y, t und z zum Vorschein kommen, welche man zur Elimination von t und z benutzen kann.

Die Fälle, worin die Werthe von k und l imaginär oder einander gleich werden, werden auf ähnliche Weise wie ihre analogen im vorhergehenden Paragraphen behandelt.

Man kann nun dieses Verfahren auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen ausdehnen.

Anmerkung. Im Falle die Coefficienten von z, y und x Funktionen von t sind, multiplicirt man die Gleichungen (2) und (3) bezüglich mit den unbestimmten Funktionen ϑ und $\vartheta_{,}$ von t, addirt die Produkte zur Gleichung (1), macht ferner $z+\vartheta x+\vartheta_{,}y=u$, und setzt endlich in dem Resultate die Coefficienten von x und von y gleich Null, was man wegen der Unbestimmtheit der Funktionen ϑ und $\vartheta_{,}$ kann. Man erhält dadurch die drei Gleichungen:

$$dz+(P+P_{,}\vartheta+P_{,,}\vartheta_{,})zdt=(T+T_{,}\vartheta+T_{,,}\vartheta_{,})dt,$$
$$d\vartheta+(P+P_{,}\vartheta+P_{,,}\vartheta_{,})\vartheta dt=(Q+Q_{,}\vartheta+Q_{,,}\vartheta_{,})dt,$$
$$d\vartheta_{,}+(P+P_{,}\vartheta+P_{,,}\vartheta_{,})\vartheta_{,}dt=(Q+Q_{,}\vartheta+Q_{,,}\vartheta_{,})dt.$$

Findet man Werthe von ϑ und $\vartheta_{,}$ welche den beiden letzten Gleichungen genügen, so wird die erste auf die Veränderlichen z und t zurückgeführte Gleichung integrirt werden können.

§. 214. Hat man die beiden Gleichungen der zweiten Ordnung:

$$d^2y+(ady+bdx)\,dt+(cy+gx)\,dt^2=Tdt^2,$$
$$d^2x+(a'dy+b'dx)dt+(c'y+g'x)dt^2=T_{,}dt^2,$$

so macht man $dy=pdt$, $dx=qdt$.

Dadurch erhält man zwischen den fünf Veränderlichen p, q, x, y und t die vier Gleichungen:

$$dp+(ap+bq+cy+gx)\,dt=T\,dt,$$
$$dy+(a'p+b'q+c'y+g'x)dt=T_{,}dt,$$
$$dy-pdt=0,\ dx-qdt=0,$$

welche sich nach der oben auseinander gesetzten Methode behandeln lassen.

Man sieht, daß das Verfahren von D'Alembert sich auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen des ersten Grades und einer beliebigen Ordnung anwenden läßt.

Geometrische Aufgaben, welche auf Differentialgleichungen führen.

§. 215. Wenn man in der Gleichung $F(x, y, c,)=0$ einer Curve der Constanten c nach und nach alle möglichen Werthe beilegt, so erhält man ein System von Curven, welche sämmtlich zu derselben Gattung gehören. Man soll nun die Curve, welche ein solches System zu einerlei Gattung gehöriger Curven unter einem gegebenen Winkel schneidet, d. h. jene Curve, welche man Trajectorie nennt, finden; dieselbe heißt orthogonal oder rechtwinklig, wenn jener Winkel ein rechter ist.

Es sei $F(Y,X,c)=0$ die Gleichung, aus welcher durch successive Aenderung von c das System der Curven von derselben Gattung entsteht. Für einen gewissen Werth von c nimmt die durchschnittene Curve eine bestimmte Lage AM (Fig. 53) an. Zieht man nun in dem Durchschnittspunkt M dieser Linie und der gesuchten Trajectorie DM an beide Curven die Berührenden MT′ und MT; so soll der Bedingung der Aufgabe zufolge der Winkel T′MT dem gegebenen Winkel gleich sein. Bezeichnet man daher die trigonometrische Tangente dieses Winkels mit a, so ist, wegen:

$$\tang T'MT = \tang(MTP - MT'P):$$

$$a = \frac{y' - Y'}{1 + Y'y'} \text{ oder } (1 + Y'y')a + Y' - y' = 0 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Man muß hier y und x statt Y und X schreiben, weil im Punkte M die durchschneidende und durchschnittene Curve dieselben Coordinaten haben. Eliminirt man hierauf zwischen der Gleichung (1) und der Gleichung $F(y, x, c)=0$ die Constante c, so hat man die Differentialgleichung der gesuchten Curve.

Soll die Trajectorie orthogonal werden, so geht die Gleichung (1) in $1+Y'y'=0$ . . . (2) über.

Beispiele: 1. Die Curve zu finden: welche das System der geraden Linien $Y=cX$ rechtwinklig schneidet. Es folgt hieraus $Y'=c$,

wonach die Gleichung (2) wird: $1+cy'=0$. Eliminirt man daraus c mittelst $y=cx$, so kommt $xdx+ydy=0$; woraus $x^2+y^2=A^2$. Die Trajectorie ist also ein Kreis mit beliebigem Radius.

Soll dagegen das System der geraden Linien unter einem gegebenen Winkel, dessen trigonometrische Tangente a ist, geschnitten werden; so erhält man, wenn man die nämliche Rechnung mit der Gleichung (1) macht, die homogene Differentialgleichung:

$$y+ax=y'(x-ay).$$

Das Integral derselben:

$$al(c\sqrt{(x^2+y^2)}=\text{arc}\left((\text{tang}=\frac{y}{x}\right)$$

ist die Gleichung der logarithmischen Spirale.

2. Für die Gleichung $Y^n X^m=c$, welche der Familie der Hyperbeln und Parabeln angehört, gibt dieselbe Rechnung die homogene Differentialgleichung:

$$(nx+amy)y'=anx-my.$$

Soll die Trajectorie orthogonal werden, so hat man $myy'=nx$. Das Integral hievon ist $my^2-nx^2=A$, woraus folgt, daß die gesuchte Curve eine gewöhnliche Hyperbel oder eine Ellipse ist, je nachdem n positiv oder negativ wird.

3. Die orthogonale Trajectorie des Kreises $y^2=2cx-x^2$ ist ein anderer Kreis, der $y^2+x^2=Ay$ zur Gleichung hat. Man construirt denselben, wenn man einen beliebigen Punkt der Achse der y zum Mittelpunkt und den Abstand desselben vom Ursprung zum Halbmesser nimmt.

4. Die orthogonale Trajectorie für ein System um einen gemeinsamen Mittelpunkt construirter ähnlicher Ellipsen, wo mithin das Verhältniß der Achsen $\frac{b}{a}=n$ dasselbe bleibt, zu finden. Man hat $Y=n\sqrt{(a^2-X^2)}$, aus welcher Gleichung durch Aenderung von a die Reihe von Ellipsen entsteht, ferner $Y'=\frac{-nX}{\sqrt{(a^2-X^2)}}$. Die Differentialgleichung der gesuchten Trajectorie ist hiernach $n^2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$; woraus das Integral $y^{n^2}=cx$.

Anmerkung. Gehen die Ellipsen in Kreise über, so ist $n=\frac{b}{a}=1$; daher die Gleichung der orthogonalen Trajectorie $y=cx$, was mit Aufgabe 1 übereinstimmt.

§. 216. Handelt es sich darum, eine Curve zu finden, deren Subtangente, Tangente oder eine andere Hülfslinie einer gegebenen Funktion φ von x und y sei; so hat man es mit der Integration folgender Ausdrücke $y=y'\varphi$, $y\sqrt{(1+y'^2)}=y'\varphi$ . . . zu thun. Es ist dies der Grund, warum man die Integration der Differentialgleichungen von der ersten Ordnung auch die umgekehrte Methode der Tangenten genannt hat.

Es mögen hierüber jetzt einige Beispiele folgen. Die Curve zu finden, bei welcher die Summe t der Abscisse und der Subnormale zu der Normale n in einer gewissen Relation $n=\varphi t$ steht. Da $t=x+yy'$ und $n=y\sqrt{(1+y'^2)}$ ist, so reducirt sich die Auflösung auf die Integration der Gleichung:

$$y\sqrt{(1+y'^2)}=\varphi(x+yy').$$

Soll die Normale die mittlere Proportionale zwischen einer gegebenen Linie 2p und der Summe der Abscisse und Subnormale sein, so hat man:

$$y^2(1+y'^2)=2p(x+yy').$$

Indem man diese Gleichung in Bezug auf yy' auflöst, findet man:

$$\frac{p-yy'}{\sqrt{(p^2+2px-y^2)}}+1=0,$$

wo das erste Glied die unmittelbare Derivirte von $\sqrt{(p^2+2px-y^2)}$ ist. Das vollständige Integral ist daher $\sqrt{(p^2+2px-y^2)}=a-x$, oder, wenn man aufs Quadrat erhebt und c statt $a+p$ schreibt,

$$y^2+x^2-2cx+c^2-2pc=0.$$

Die gesuchte Curve ist demnach ein Kreis, dessen Mittelpunkt ein beliebiger Punkt der Achse der x und dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen 2p und dem Abstande dieses Punktes vom Ursprung ist.

Anmerkung. Soll die Abscisse vermehrt um die Subnormale zu der Normalen ein beständiges Verhältniß a haben, so erhält man die homogene Gleichung:

$$a(x+yy')=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Das vollständige Integral ist $(1-a^2)(y^2+x^2)=2cx-c^2$, die Gleichung eines Kreises. Die besondere Auflösung, welche unserer Differentialgleichung ebenfalls Genüge thut, ist $(1-a^2)y^2=a^2x^2$, d. h. ein System von zwei geraden Linien.

§. 217. Die Curve zu finden, bei welcher die von zwei festen Punkten aus auf ihre sämmtlichen Berührenden gefällten Senkrechten ein constantes Rechteck $=k$ bilden. Wählt man die Verbindungslinie der zwei festen Punkte zur Abscissenachse und einen derselben zum Ursprung, von welchem der andere um $2a$ absteht; so ist der Bedingung der Aufgabe zufolge:

$$(2ay'+y-y'x)(y-y'x)=k(1+y'^2)\ \ldots\ (1).$$

Diese Gleichung wird integrirt, wenn man sie vorerst differentiirt hat; man erhält dadurch, weil y'' ein gemeinsamer Faktor wird, die beiden Gleichungen:

$$y''=0 \text{ und } -x(2ay'+y-y'x)+(y-y'x)(2a-x)=2ky'\ \ldots\ (2).$$

Die erste gibt $y'=c$, wodurch die vorgelegte in:

$$(2ac+y-cx)(y-cx)=k(1+c^2)$$

übergeht, was zwei geraden Linien entspricht.

Was die Gleichung (2) anlangt, so erhält man, wenn man den Werth von y' daraus nimmt, solchen in (1) substituirt und dabei x mit $x+a$ vertauscht:

$$y^2(a^2+k)+x^2=k(a^2+k).$$

Es ist dies die Gleichung einer Ellipse, welche die beiden festen Punkte zu Brennpunkten und $\sqrt{(k+a^2)}$ und $\sqrt{k}$ zu halben Achsen hat. Diese Curve bildet die besondere Auflösung der Aufgabe und geht aus dem stetigen Durchschnitte der in dem allgemeinen Integral enthaltenen Geraden hervor.

§. 218. Die Curve zu finden, bei welcher sich der Krümmungshalbmesser zur Normale wie $n:1$ verhält. Man hat:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=ny\sqrt{(1+y'^2)},\ \text{oder, weil: } \frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy'}{dy}=y'\frac{dy'}{dy} \text{ ist,}$$

$$(1+y'^2)=nyy'\frac{dy'}{dy}.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration:

$$cy^{\frac{2}{n}}=1+y'^2 \text{ oder } dx=\frac{dy}{\sqrt{(cy^{\frac{2}{n}}-1}}$$

als erste Differentialgleichung der gesuchten Curve.

Für $n=-1$ haben wir $dx=\frac{ydy}{\sqrt{(c-y^2)}}$, woraus durch Integration $y^2+(x-c')^2=c$; die gesuchte Curve ist mithin ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Abscissenachse liegt.

Für $n=+1$ haben wir $dx=\frac{dy}{\sqrt{(cy^2-1)}}$, woraus, nachdem $c^{\frac{1}{2}}$ für c gesetzt worden, durch Integration entsteht:

$$y=\tfrac{1}{2}c\left(e^{\frac{x-c'}{c}}+e^{\frac{-x-c'}{c}}\right);$$

die gesuchte Linie ist also eine Kettenlinie.

Anmerkung. Für $n=+2$ haben wir $dx=\frac{dy}{\sqrt{(cy-1)}}$, woraus wir, wenn integrirt und $\frac{1}{c}$ für c gesetzt wird, finden:

$$(x-c')^2=4c(y-c);$$

die gesuchte Curve ist also in diesem Falle eine gewöhnliche Parabel.

§. 219. Eine Curve MN (Fig. 54) ist gegeben; man soll die Curve mn von solcher Beschaffenheit finden, daß, wenn von einem Punkte M der gegebenen Curve eine Senkrechte MD auf die zugehörige Ordinate MP errichtet und der Endpunkt D mit dem Durchschnitte m der gesuchten Curve und der Ordinate MP verbunden wird, die Verbindungslinie Dm diese Curve in m berühre. Es sei $Y=\varphi x$ die Gleichung der gegebenen und y die Ordinate der gesuchten Curve. Der Bedingung der Aufgabe zufolge hat man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y-y}{a} \text{ oder } \frac{dy}{dx}+\frac{y}{a}=\frac{\varphi x}{a},$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Curve ist.

Ist z. B. die gegebene Linie eine durch den Ursprung gehende Gerade, so ist $Y=bx$ und $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{a}=\frac{bx}{a}$; woraus durch Integration

$$y=b(x-a)+\frac{C}{a}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Ist die gegebene Linie eine logarithmische Linie und $Y=ae^{-\frac{x}{a}}$ ihre Gleichung; so findet man:

$$y=\tfrac{1}{2}ae^{\frac{x}{a}}+\frac{c}{a}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Anmerkung. Soll die gesuchte Curve die logarithmische Linie auf der Ordinatenachse schneiden, so muß $Y=y$ für $x=0$ werden; dies gibt uns die Bedingungsgleichung:

$$\tfrac{1}{2}a+\frac{c}{a}=a, \text{ d. h. } c=\tfrac{1}{2}a^2.$$

Wird dieser Werth in die gefundene Gleichung substituirt, so hat man:

$$y=\tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

welches die Gleichung einer Kettenlinie ist.

§. 220. Der Leser kann sich noch in der Auflösung folgender Aufgaben üben:

1. Bei welcher Curve ist die Subnormale stets der Abscisse gleich.

2. Die Curve zu finden, bei welcher die aus einem gegebenen Punkte auf ihre Berührenden gefällten Senkrechten sämmtlich einander gleich sind.

3. Die Curve zu bestimmen, bei welcher der Krümmungshalbmesser dem Cubus der Normale proportional ist.

4. Die Curve zu finden, bei welcher das Quadrat des Krümmungshalbmessers der Abscisse proportional ist.

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen.

Von den vollständigen Differentialgleichungen.

§. 221. Hat man die Gleichung $dz = pdx + qdy$, wo p und q blos x und y enthalten; so ist z als eine Funktion von zwei unter einander unabhängigen Veränderlichen x und y anzusehen. Die Integration einer solchen Differentialgleichung ist im §. 177 gelehrt worden, wo zugleich nachgewiesen wurde, daß im Falle diese Integration möglich ist, die Bedingung:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \quad \ldots (1)$$

erfüllt werden muß. Geschieht dieser Relation nicht Genüge, so kann man daraus schließen, daß $pdx + qdy$ kein vollständiges Differential von $z = f(x, y)$ sei. So z. B. haben wir an dem angeführten Orte gefunden, daß das Integral von:

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} + adx + 2bydy \text{ ist:}$$

$$z = by^2 + ax + lc\left[x + \sqrt{(1+x^2)}\right].$$

§. 222. Hat die Differentialgleichung die Gestalt:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

wo P, Q und R die Veränderlichen x, y, z zugleich enthalten; so kann man sie unter die Form bringen:

$$dz = pdx + qdy, \text{ wenn man } p = -\frac{P}{R},\ q = -\frac{Q}{R} \text{ macht.}$$

Man hat ein vollständiges Differential, wenn $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$ ist. Allein im gegenwärtigen Falle, wo laut der Annahme P, Q, R die drei Veränderlichen x, y und z zugleich enthalten, muß man bei den angezeigten Differentiationen auch z varriiren lassen, was uns statt

$$\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx} \text{ den Ausdruck } \frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{dz},$$

oder, wenn für p und q ihre Werthe substituirt werden:

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0 \quad \ldots (2),$$

als Bedingungsgleichung gibt, welche befriedigt werden muß, damit eine einzige Grundgleichung zwischen drei Veränderlichen als Integral der vorgelegten Differentialgleichung betrachtet werden kann.

§. 223. Ist μ der Faktor, welcher $Pdx+Qdy+Rdz=0$ zu einem vollständigen Differential von $f(x, y, z)=0$ macht; so muß, wenn x als beständig angesehen wird, $\mu Qdy+\mu Rdz=0$ ein vollständiges Differential in Bezug auf y und z sein: ähnliches gilt, wenn man statt x sowohl y als z als beständig ansehen wollte. Es müssen hiernach folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\frac{d\cdot\mu R}{dy}=\frac{d\cdot\mu Q}{dz},\ \frac{d\cdot\mu P}{dz}=\frac{d\cdot\mu R}{dx},\ \frac{d\cdot\mu Q}{dx}=\frac{d\cdot\mu P}{dy}, \text{ oder:}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu\left[\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right]&=Q\frac{d\mu}{dz}-R\frac{d\mu}{dy}\\ \mu\left[\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right]&=R\frac{d\mu}{dz}-P\frac{d\mu}{dz}\\ \mu\left[\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right]&=P\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}\end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit P, die zweite mit Q und die dritte mit R und addirt die Produkte; so erhält man die Relation (2) wieder, welcher demnach die gegebene Gleichung anfangs Genüge leisten muß, damit sie vermittelst eines Faktors ein vollständiges Differential werden könne. Wir sehen hieraus, daß zwischen den Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen und jenen mit drei Veränderlichen ein bemerkenswerther Unterschied besteht, indem den erstern jederzeit eine gewisse primitive Relation zwischen den variabeln Größen x und y entspricht, während den

letztern nur dann eine bestimmte Relation zwischen den veränderlichen Größen x, y und z zukommt, wenn die Gleichung (2) befriedigt wird.

§. 224. Wenn in der gegebenen Differentialgleichung die Differentiale dx, dy und dz den ersten Grad übersteigen, so muß sie sich, wenn sie von einer primitiven Gleichung herrühren soll, vor Allem auf die Form $Pdx+Qdy+Rdz=0$ zurückführen lassen, oder was einerlei ist, bei der Auflösung derselben in Bezug auf eins der Differentiale müssen die beiden andern vom Wurzelzeichen frei sein; unsere Differentialgleichung ist mithin integrirbar, wenn sie sich in rationale Faktoren zerlegen läßt. Für:

$$Adx^2+Bdy^2+Cdz^2+Ddxdy+Edxdy+Fdydz=0 \text{ z. B.}$$

erhält man, wenn sie in Bezug auf dz aufgelöst wird, folgende Wurzelgröße:

$$\sqrt{[(E^2=4AC)dx^2+2(EF-2DC)dxdy+(F^2-4BC)dy^2]},$$

so daß die Differentiale mit dem Wurzelzeichen behaftet bleiben, wenn man nicht hat:

$$(EF-2DC)^2-(E^2-4AC)(F^2-4BC)=0 \ldots (4).$$

Wird diese Bedingungsgleichung befriedigt, so sind zwei Gleichungen von der Form $Pdx+Qdy+Rdz=0$ zu integriren.

§. 225. Geschieht der Relation (2) Genüge, so hängt die Integration einer Gleichung mit drei Veränderlichen $Pdx+Qdy+Rdz=0$ von derjenigen einer Gleichung mit zwei Veränderlichen ab. Man sieht nämlich zuvörderst eine der Veränderlichen, etwa z, als beständig an, was $Pdx+Qdy=0$ gibt. Ist μ nun derjenige Faktor, welcher die Differentialgleichung $Pdx+Qdy=0$ integrirbar macht; so erhält man, wenn $\int(\mu Pdx+\mu Qdy)=U$ gesetzt wird, das Integral $U+Z=0$, wo Z eine bloße Funktion von z bedeutet. Differentiirt man hierauf dieses Integral, indem man x, y und z zugleich als veränderlich betrachtet, und erwägt, daß $\frac{dU}{dx}=\mu P$, $\frac{dU}{dy}=\mu Q$ ist; so hat man die Gleichung:

$$\mu Pdx+\mu Qdy+\left(\frac{dU}{dz}+\frac{dZ}{dz}\right)dz=0,$$

aus deren vergleichender Zusammenstellung mit der gegebenen folgt:

$$\frac{dZ}{dz} = \mu R - \frac{dU}{dz}.$$

Damit nun Z bestimmt werden könne, muß sich der zweite Theil der letztern Gleichung auf eine Funktion von z und Z reduciren, wenigstens, wenn man daraus y mittelst der Gleichung $U + Z = 0$ wegschafft.

Anmerkung. Die Integration läßt sich also hier auf dreierlei Art bewerkstelligen, je nachdem man entweder z oder y oder x als constant betrachtet; man wird aber immer dieselbe Integralgleichung erhalten.

§. 226. Wir wollen nun das Vorgetragene auf einige Beispiele anwenden:

1. Es sei: $dx(y+z)+dy(x+z)+dz(x+y)=0$.

Die Bedingungsgleichung (2) wird befriedigt. Setzt man z constant, so kommt:

$dx(y+z)+dy(x+z)=0$, dessen Integral ist: $(x+z)(y+z)=Z$.

Um die Funktion Z zu bestimmen, differentiire man dieses Integral und vergleiche das Resultat mit der vorgelegten Gleichung; hierdurch erhält man $dZ=2zdz$ und hieraus $Z=z^2+c$. Das gesuchte Integral ist folglich $xz+yz+xy=c$.

2. Es sei $(x^2+y^2)dz=(z-c)(xdx+ydy)$.

Die Bedingungsgleichung (2) wird erfüllt. Indem man $dz=0$ setzt und integrirt, findet man $x^2+y^2=Z^2$. Wird dieses Integral differentiirt, und das Resultat mit der gegebenen Gleichung verglichen; so hat man $Zdz=(z-c)dZ$, woraus $Z=A(z-c)$. Das verlangte Integral ist hiernach $x^2+y^2=A^2(z-c)^2$.

3. Der Differentialgleichung

$$(y^2+yz+z^2)dx+(x^2+xz+z^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0$$

entspricht eine Grundgleichung, weil der Relation (2) Genüge geschieht. Um diese Grundgleichung zu finden, mache man $dz=0$, wodurch man erhält:

$$\frac{dx}{x^2+xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+yz+z^2}=0.$$

Das Integral hiervon ist:

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{z+2x}{z\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{z+2y}{z\sqrt{3}}\right)\right]=fz, \text{ oder:}$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{(x+y+z)z\sqrt{3}}{z^2-zx-zy-2xy}\right)=\tfrac{1}{2}z\sqrt{3}fz,$$

wenn man berücksichtigt, daß aus der allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tang}(m+n)=\frac{\operatorname{tg} m+\operatorname{tg} n}{1-\operatorname{tg} m \operatorname{tg} n} \text{ folgt,}$$

$$m+n=\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\operatorname{tg} m+\operatorname{tg} n}{1-\operatorname{tg} m \operatorname{tg} n}\right).$$

Weil hier der Bogen eine Funktion von z ist, so ists auch seine Tangente, und man kann, wenn der Nenner $=\varphi$ gemacht wird, setzen:

$$\frac{(x+y+z)z}{z^2-xz-zy-2xy}=\frac{(x+y+z)z}{\varphi}=Z \ . \ . \ . \ (a).$$

Wird diese Gleichung differentiirt, der Nenner φ^2 weggeschafft, das Resultat dann mit der vorgelegten Gleichung, nachdem sie mit 2z multiplicirt worden, verglichen; so findet man:

$$2(x^2z+3xyz+y^2z+z^2x+z^2y+x^2y+y^2x)dz+\varphi^2\cdot dZ=0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man statt φ seinen Werth aus (a) substituirt und den gemeinschaftlichen Faktor $x+y+z$ wegläßt, in:

$$2(xy+yz+xz)Z^2dz+(x+y+z)z^2\cdot dZ=0.$$

Indem man hierin den aus (a) entnommenen Werth

$$xy+yz=\frac{z^2Z-z^2-2xyZ}{Z+1}$$

einführt, den gemeinschaftlichen Faktor $2Z(z^2-xy)$ unterdrückt, hat man:

$$Z(Z-1)\,dz+zdZ=0. \text{ Hieraus:}$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{dZ}{Z}-\frac{dZ}{Z-1}, \text{ und durch Integration } z=\frac{cZ}{Z-1} \text{ oder } Z=\frac{z}{z-c}.$$

Das gesuchte Integral ist folglich:

$$xy+xz+yz=c(x+y+z).$$

4. Es sei $(xdx+ydy)^2-z^2dz^2=0$. Man hat hier

$$(xdx+ydy+zdz)(xdx+ydy-zdz)=0.$$

Der erste Faktor gibt das Integral:

$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=c$, und der zweite das Integral: $\frac{x^2+y^2-z^2}{2}=c'$.

Jedes dieser beiden Integrale, so wie das Produkt derselben befriedigt die gegebene Differentialgleichung.

§. 227. Die im Vorstehenden für $Pdx+Qdy+Rdx=0$ gelehrte Integrationsmethode kann auch befolgt werden, wenn die Bedingungsgleichung (2) nicht befriedigt wird. Denn integrirt man zuerst, indem man eine der Veränderlichen, z. B. z als constant betrachtet, und bezeichnet mit $U+Z=0$ die Grundgleichung für $\mu Pdx+\mu Qdy=0$, wo μ den zu dieser Integration nöthigen Faktor darstellt, und differentiirt dann jene Grundgleichung nach x, y und z zugleich; so erhält man bei der vergleichenden Zusammenstellung des Resultats mit der vorgelegten Gleichung:

$$\frac{dZ}{dz}=\mu R-\frac{dU}{dz} \ . \ . \ . \ (5).$$

Hier wird sich zwar $\mu R-\frac{dU}{dz}$ nicht mehr auf eine bloße Funktion von z reduciren, wie dieses der Fall ist, wenn die Bedingungsgleichung (2) erfüllt wird. Dessenungeachtet wird, wenn man $Z=\varphi z$ setzt, $U+Z=0$ die vorgelegte Gleichung befriedigen, wofern zu gleicher Zeit der Relation (5) entsprochen wird. Das System der beiden Gleichungen:

$$U+\varphi z=0, \frac{dU}{dz}+\varphi' z=\mu R \ . \ . \ . \ (6)$$

genügt also der gegebenen Differentialgleichung, von welcher Beschaffenheit die Funktion φ auch sein mag.

Diejenigen Gleichungen, welche die Bedingungsgleichung (2) nicht befriedigten, nannte man ehemals absurde Gleichungen; man nahm an, daß sie keine Bedeutung hätten und daß kein einer Auflösung fähiges Problem zu dergleichen Relationen führen könnte, die man hiernach als zu der Klasse der imaginären Größen gehörig betrachtete. Monge bewies das Irrige dieser Ansicht, indem er zeigte, daß solchen Relationen ein System von zwei Gleichungen Genüge leistet.

§. 228. Sucht man eine krumme Oberfläche, welche gewisse Bedingungen erfüllen soll, und gelangt man dadurch, daß man diese letztern in die analytische Sprache überträgt, zu einer Differential-

gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z; so werden die fraglichen Punkte im Raume, wofern die Bedingungsgleichung (2) unbefriedigt bleibt, nicht mehr einer krummen Oberfläche angehören, sondern eine doppelt gekrümmte Curve vorstellen, indem man zwei Gleichungen statt einer einzigen dafür gefunden hat. Ueberdies ist es wegen der Willkührlichkeit von φ nicht blos eine Curve, welche dem Problem genügt, sondern eine unendliche Anzahl von doppelt gekrümmten Linien, welche eine gemeinschaftliche Eigenschaft besitzen.

Beispiele: 1. Für $zdx+xdy+ydz=0$ findet man:

$$\mu=x^{-1},\ y+zlx=U.$$

Das System der Gleichungen:

$$y+zlx+\varphi z=0,\ lx+\varphi' z=yx^{-1}$$

befriedigt daher die vorgelegte Differentialgleichung.

2. Für $[x(x-a)+y(y-b)]dz=(z-c)(xdx+xdy)$ hat man $\mu=(z-c)^{-1}$; wonach der Inbegriff der beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2+2\varphi z=0,\ (z-c)\varphi' z+x(x-a)+y(y-b)=0$$

das Integral ist.

3. $dz-xy(xdx+ydy)=0$ hat zum Integral das System der Gleichungen:

$$z=f(x^2+y^2),\ \frac{xy}{2}=f'(x^2+y^2).$$

4. Für $dz-xy(dx-dy)=0$ findet man das Integral:

$$z=f(x-y),\ xy=f'(x-y).$$

Anmerkung. Das System der beiden letztern Gleichungen entspricht einer doppelt gekrümmten Curve, welche auf einer Cylinderfläche liegt, deren Achse in der Ebene xy mit der Achse der x einen Winkel von 45° bildet. Die Projection dieser Curve hängt von der Grundfläche des Cylinders ab.

Integration der partiellen Differentialgleichungen von der ersten Ordnung.

§. 229. Wir gehen jetzt zur Aufsuchung der Funktionen von zwei Veränderlichen $z=f(x, y)$ über, wenn man einen ihrer partiellen Differentialcoefficienten p und q der ersten Ordnung oder eine bloße

Relation zwischen denselben hat. Betrachten wir zuvörderst den Fall, wo q in der Relation, nämlich $F(p, x, y, z)=0$, nicht vorkommt. Da die Veränderlichen x und y in dem gesuchten Integral $z=f(x, y)$ ganz unabhängig von einander sind, mithin die eine ohne die andere variiren kann; so wird unsere Differentialgleichung $F=0$, die q nicht enthält, sich blos auf den Fall beziehen, in welchem sich x und z allein geändert haben. Es handelt sich also darum, in dieser Gleichung $p=\frac{dz}{dx}$ zu setzen und dann zwischen den Variabeln x und z zu integriren, indem man y als constant ansieht. Die dem Integral hinzuzufügende Constante wird alsdann durch eine völlig unbestimmte Funktion von y, die durch φy dargestellt sein mag, vertreten. Um folglich die Gleichung $F(p, x, y, z)=0$ zu integriren, muß man p mittelst der Relation $dz=pdx$ eliminiren, hierauf zur Integration schreiten, wobei y constant angesehen wird, und endlich die willkührliche Funktion φy hinzuaddiren.

§. 230. Ein ähnliches Verfahren wird man befolgen, wenn eine Gleichung von der Form $F(q, x, y, z)=0$ zu integriren wäre.

Beispiele: 1. Das Integral von $x=p\sqrt{(x^2+y^2)}$ ist:

$$z=\sqrt{(x^2+y^2)}+\varphi y.$$

2. Für $p\sqrt{(a^2-y^2-x^2)}=a$ findet man:

$$z=a\cdot\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{(a^2-y^2)}}\right)+\varphi y.$$

3. Es sei $qxy+az=0$. Integrirt man $xydz+azdy=0$, indem man x als constant ansieht; so erhält man $z^x y^a=\varphi x$.

4. $p(y^2+x^2)=y^2+z^2$ gibt die homogene Gleichung: $(y^2+x^2)dz=(y^2+z^2)dx$, deren Integral ist:

$$\operatorname{arc}\left(\tang=\frac{z}{y}\right)-\operatorname{arc}\left(\tang=\frac{x}{y}\right)=\varphi y, \text{ oder:}$$

$$\operatorname{arc}\left(\tang=\frac{y(z-x)}{y^2+xz}\right)=\varphi y \text{ oder } \frac{z-x}{y^2+xz}=\psi y.$$

Anmerkung. Es kann sich ereignen, daß solche Differentialgleichungen sich nicht vollständig integriren lassen, wie dies z. B. mit $p=\frac{y^2}{x^2+z^2}$ oder $y^2dx=x^2dz+z^2dz$ der Fall ist. Das Integral wird alsdann nur mittelst einer Reihe dargestellt werden können.

§. 231. Die Gleichung $Pp+Qq=R$, wo P, Q und R zugleich x, y, z enthalten, ist die allgemeinste, welche man zwischen den Differentialcoefficienten der ersten Ordnung p und q haben kann, wenn diese nicht den ersten Grad übersteigen. Eliminirt man p mittelst der Relation $dz=pdx+qdy$, so bekommt man:

$$Pdz-Rdx=q(Pdy-Qdx) \ldots (1);$$

Dieser Gleichung, worin q unbestimmt ist, hat man nun auf die allgemeinste Weise zu genügen. Sind jetzt P, Q und R dergestalt beschaffen, daß $Pdz-Rdx$ nur z und x, und $Pdy-Qdx$ nur y und x enthält; so gibt es einen Faktor μ, welcher $Pdy-Qdx=0$ und einen Faktor μ', welcher $Pdz-Rdx=0$ zum genauen Differential macht. Bezeichnet man diese Differentiale mit $d\varrho=0$ und $d\pi=0$, so hat man $Pdy-Qdx=\frac{1}{\mu}d\varrho$ und $Pdz-Rdx=\frac{1}{\mu'}d\pi$. Dadurch geht die Gleichung (1) in folgende über: $d\pi=\frac{\mu' q}{\mu}d\varrho$, welche nicht integrirbar sein kann, wenn nicht $\frac{\mu' q}{\mu}$ eine beliebige Funktion von ϱ ist. Man erhält hiernach $\pi=\varphi\varrho$, wo φ eine ganz willkührliche Funktion bezeichnet.

Sind in den Relationen:

$$Pdz-Rdx=0,\ Pdy-Qdx=0 \ldots (2)$$

die Veränderlichen x, y und z zugleich enthalten; so wird ebenfalls $\pi=\varphi\varrho$, wofern $\pi=\alpha$ und $\varrho=\beta$ solche Funktionen darstellen, welche jenen Relationen (2) genügen, das Integral der vorgelegten Gleichung sein. In der That, soll $\pi=\varphi\varrho$ das Integral derselben werden, so muß, wenn man dieses Integral sowohl in Beziehung auf x und z als auch in Beziehung auf y und z differentiirt, daraus die Werthe von p und q nimmt, und sie in die vorgelegte Gleichung $Pp+Qq=R$ substituirt, der letztern hierdurch Genüge geschehen. Da die Funktionen π und ϱ als solche anzusehen sind, welche die drei Veränderlichen x, y und z zu gleicher Zeit enthalten; so hat man:

$$d\pi=Adx+Bdy+Cdz=0,\ d\varrho=adx+bdy+cdz=0.$$

Hiernach ergibt sich für die partielle Differentialgleichung von $\pi-\varphi\varrho=0$ in Bezug auf z und x:

$$(C-c\varphi'\varrho)p+A-a\varphi'\varrho=0,$$

und für jene in Bezug auf z und y:

$$(C-c\varphi'\varrho)q+B-b\varphi'\varrho=0.$$

Zieht man daraus die Werthe von p und q, um sie in $Pp+Qq=R$ zu substituiren; so findet man, daß die Gleichung $\pi=\varphi\varrho$ die vorgelegte befriedigt, wofern man hat:

$$AP+BQ+CR=\varphi'\varrho\cdot(aP+bQ+cR).$$

Der Voraussetzung zufolge sind aber die Funktionen π und ϱ dergestalt gewählt, daß sie den Gleichungen (2) genügen. Zieht man daher aus den letztern die Werthe von dz und dy; um sie in $d\pi=0$ und $d\varrho=0$ einzuführen; so wird man sehen, daß die Gleichungen, aus denen die Funktionen π und ϱ herzuleiten sind, mit den Gleichungen:

$$AP+BQ+CR=0,\ aP+bQ+cR=0$$ übereinstimmen.

Die Relation $\pi=\varphi\varrho$, wo φ eine beliebige Funktion bezeichnet, ist folglich das Integral der vorgelegten Gleichung.

Eliminirt man dx aus den Relationen (2), so kommt $Qdz-Rdy=0$, ein Resultat welches man statt einer der Gleichungen (2) bei der Rechnung gebrauchen kann.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung $Pp+Qq=R$ läuft mithin dahin aus, zwei von den folgenden Gleichungen:

$$Pdz-Rdx=0,\ Rdy-Qdx=0,\ Qdz-Rdy=0\ \ldots\ (3)$$

durch die Funktionen $\pi=\alpha$, $\varrho=\beta$ zu genügen, und dann $\pi=\varphi\varrho$ zu setzen, wo φ eine willkührliche Funktion bezeichnet, dagegen α und β Constante darstellen, welche in dem gesuchten Integral nicht vorkommen, indem die Funktion φ jede Anzahl von willkührlichen Constanten mit sich führt.

Anmerkung. Die Gleichung $Qdz-Rdy=0$ bietet sich auch dar, wenn man den Differentialcoefficienten q aus den Gleichungen $Pp+Qq=R$ und $dz=pdx+qdy$ wegschafft, und die nun statt (1) resultirende Gleichung auf die nämliche Art, wie oben geschehen, in zwei Gleichungen zerfällt.

§. 232. Wir wollen nun die verschiedenen Fälle näher betrachten, welche die Gleichungen (3) darbieten können.

I. Wenn R Null ist, so geht eine unserer Gleichungen (3) in $dz=0$ über, woraus $z=\alpha=\pi$. In der zweiten zu behandelnden Gleichung kommen daher nur noch die beiden Veränderlichen x und y vor,

deren Integral $\varrho=\beta$ man nach den im vorigen Kapitel angeführten Regeln zu suchen hat. Hiernach wäre $z=\varphi\varrho$ das Integral von

$$Pp+Qq=0.$$

Beispiele: 1. Für $py=qx$ erhält man $y\,dy+xdx=0$. Hieraus $\varrho=x^2+y^2$ und $z=\varphi(x^2+y^2)$, welche letztere die Gleichung der Rotationsflächen ist, deren Umdrehungsachse mit der Achse der z zusammenfällt.

2. Für $px+qy=0$ findet man $xdy-ydx=0$; woraus

$$ly=l\alpha x,\ y=\alpha x,\ \frac{y}{x}=\varrho.$$

Das gesuchte Integral ist daher $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, welches den Conoiden angehört.

3. Für $q=pP$, wo P kein z enthält, findet man das Integral $z=\varphi\varrho$; die Funktion ϱ ist aus der Gleichung $\varrho=\int F(dx+Pdy)$ herzuleiten, wo F den integrirbar machenden Faktor von $(dx+Pdy)$ darstellt.

II. Enthalten zwei von den Gleichungen (3) nur diejenigen Veränderlichen, deren Differentiale in ihnen vorkommen; so bestimmt die Integration jener Gleichungen die Funktionen π und ϱ.

Beispiele: 1. Für die Gleichung $px+qy=nz$ hat man:

$$xdz=nzdx,\ xdy=ydx.$$

Hieraus $z=\alpha x^n$ und $y=\beta x$; ferner $\pi=\frac{z}{x^n}$, $\varrho=\frac{y}{x}$. Folglich das gesuchte Integral $z=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, woraus hervorgeht, daß z eine homogene Funktion von x und y ist.

2. Die Gleichung $px^2+qy^2=z^2$ gibt:

$$x^2dz=z^2dx,\ x^2dy=y^2dx.\ \text{Daraus:}$$
$$z^{-1}-x^{-1}=\pi,\ y^{-1}-x^{-1}=\varrho.$$

Folglich das gesuchte Integral:

$$\frac{x-z}{xz}=\varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right).$$

3. Es sei $q=pX+V$, wobei X und V bloße Funktionen von x bezeichnen.

Man hat hier: $Xdz+Vdx=0$, $Xdy+dx=0$. Folglich:

$$z=-\int\frac{Vdx}{X}+\varphi\left(y+\int\frac{dx}{X}\right).$$

III. Enthält nur eine der Gleichungen (3) die Veränderlichen, deren Differentiale in ihr vorkommen; so integrire man dieselbe und eliminire mittelst des Integrals $\pi=\alpha$ eine der Veränderlichen aus einer unserer beiden andern Gleichungen, und integrire dann von Neuem, wodurch man $\varrho=\beta$ bekommt. Indem man wieder in ϱ für α seinen Werth π einführt, findet man das Integral $\pi=\varphi\varrho$ oder $\varrho=\psi'\pi$.

Beispiele: 1. Es sei $qxy-px^2=y^2$. Hier ist:

$$x^2dz+y^2dx=0,\ x^2dy+xydx=0.$$

Die zweite gibt $xy=\beta$; setzt man βx^{-1} statt y in die erstere, so kommt $dz+\beta^2x^{-4}dx=0$, deren Integral $z=\frac{1}{3}\beta^2x^{-3}+\alpha$ ist. Führt man hierin für β seinen Werth xy, so erhält man $z-\frac{1}{3}y^2x^{-1}=\alpha=\pi$. Das gesuchte Integral ist folglich $3zx=y^2+3x\varphi(xy)$.

2. Für $px+qy=n\sqrt{(x^2+y^2)}$ hat man:

$$xdz=ndx\sqrt{(x^2+y^2)},\ xdy=ydx.$$

Die zweite gibt $y=\beta x$; schafft man damit y aus der erstern weg, so kommt:

$dz=n\sqrt{(1+\beta^2)}dx$. Daraus folgt $z-nx\sqrt{(1+\beta^2)}=\alpha$; ferner:

$$\pi=z-n\sqrt{(x^2+y^2)},\ \varrho=yx^{-1}.$$

Das gesuchte Integral ist folglich:

$$z=n\sqrt{(x^2+y^2)}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

§. 233. Wenn die Veränderlichen in der Gleichung (3) ohne Unterschied vorkommen; so kann man jede dieser Gleichungen insbesondere nicht mehr integriren; denn es darf weder y in der ersten, noch z in der zweiten, noch x in der dritten als constant angenommen werden. Um in solchen Fällen zum Ziele zu gelangen, muß man zu besondern analytischen Betrachtungen seine Zuflucht nehmen. So gelingt öfters die Integration, wenn man für p oder q ihre aus der vorgelegten Gleichung hergeleiteten Werthe in eine der nachstehenden Gleichungen setzt, die sich aus der Relation $dz=pdx+qdy$ nach den ersten Regeln der Integralrechnung ergeben,

nämlich:
$$z=px+\int(qdy-xdp) \;\ldots\ldots\; (4)$$
$$z=qy+\int(pdx-ydq) \;\ldots\ldots\; (5)$$
$$z=px+qy-\int(xdp+ydq) \;\ldots\; (6).$$

Beispiele: 1. Es sei $p=Q$, wo Q eine gegebene Funktion von q ist. Unsere allgemeine Gleichung (6) wird hiernach:

$$z=Qx+qy-\int(xQ'+y)dq,$$

woraus erhellet, daß das Integral $\int(xQ'+y)\,dq$ eine Funktion von q sein werde.

Bezeichnen wir dieselbe allgemein durch φq, so haben wir:

$$z=Qx+qy-\varphi q \text{ und } xQ'+y=\varphi' q.$$

Das Integral ergibt sich, wenn man q zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; die Elimination gelingt, wenn φq eine algebraische Funktion ist.

2. Es sei $pq=1$. Unsere Relation (6) wird hierdurch:

$$z=px+\frac{y}{p}-\int\left(xdp-\frac{y}{p^2}dp\right).$$

Das Integral $\int\left(xdp-\frac{ydp}{p^2}\right)$ muß daher eine Funktion von p sein. Stellen wir dieselbe durch φp dar, so erhalten wir:

$$z=px+\frac{y}{p}-\varphi p \text{ und } x-\frac{y}{p^2}=\varphi' p.$$

Anmerkung. Weil die Auflösung der beiden letzten Probleme aus einem andern Principe hergeleitet wurde, so weicht die Form der Auflösung von den vorhergehenden Formen ab. Vorher erhielt man nämlich eine einzige Gleichung zwischen den drei Veränderlichen x, y, z, während man hier zwei Gleichungen für die Auflösung gefunden hat.

§. 234. Setzt man in $dz=pdx+qdy$ den aus der vorgelegten Gleichung entnommenen Werth von p oder q, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen den vier Veränderlichen x, y, z, und q oder p.

Man nehme an, daß diese Gleichung auf ein genaues Differential zurückgebracht werde, indem man p oder q oder eine Funktion ϑ dieses Buchstabens als constant ansieht, und daß $f(x, y, z, \vartheta)=c$ das Integral, unter der Voraussetzung der Beständigkeit von ϑ, sei.

Es ist aber einleuchtend, daß durch Differentiation gedachten Integrals man die erste Gleichung, aus welcher es hergeleitet worden, wieder erhalten wird, und dies nicht blos, wenn ϑ und c constant bleiben, sondern auch, wenn ϑ und c variiren, insofern die Relation $\frac{df}{d\vartheta}d\vartheta - dc = 0$ besteht. Um also dem ϑ den Charakter einer beliebigen veränderlichen Funktion in unserer Differentialgleichung, welche dabei immer die Gleichung $f = c$ zum Integral hat, wieder zu verschaffen, ist es hinreichend, c als eine willkührliche Funktion von ϑ gelten zu lassen, in der Art, daß die Relationen:

$$f(x, y, z, \vartheta) = \varphi\vartheta, \frac{df}{d\vartheta} = \varphi'\vartheta$$

gleichzeitig stattfinden. In dem Fall, wo die vorgelegte Gleichung unter der Voraussetzung der Beständigkeit von ϑ ein genaues Differential ist, bewerkstellige man daher bei einer solchen Annahme die Integration; man erhält dadurch die erste unserer Gleichungen, die hierauf in Bezug auf ϑ allein zu differentiiren übrig bleibt, um die zweite zu bilden. Das System dieser beiden Gleichungen, wo φ eine willkührliche Funktion bezeichnet, genügt der vorgelegten Gleichung. Ist φ bestimmt, so braucht man nur noch ϑ zwischen diesen Gleichungen zu eliminiren, um das gesuchte Integral zu erhalten.

Beispiel. Für $z = pq$ findet man:

$$dz = \frac{zdx}{q} + qdy, \; dy = \frac{qdz - zdx}{q^2} = \frac{(\vartheta + x)dz - zdx}{(\vartheta + x)^2},$$

wenn man $q = \vartheta + x$ macht. Indem man ϑ als constant ansieht, hat man das Integral $y = \frac{z}{x+\vartheta} + \varphi\vartheta$, woraus $\frac{z}{(x+\vartheta)^2} = \varphi'\vartheta$, wenn man in Bezug auf ϑ allein differentiirt. Das System dieser beiden Gleichungen ist mithin das Integral von $z = pq$.

Anmerkung. Die Gleichungen $f(x, y, z, \vartheta) = \varphi\vartheta, \frac{df}{d\vartheta} = \varphi'\vartheta$ gehören zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden durch $f = \varphi\vartheta$ ausgedrückten Flächen an, bestimmen daher die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen.

§. 235. Man erleichtert öfters die Integration der partiellen Differentialgleichungen dadurch, daß man sie durch Einführung einer

unbestimmten Größe in zwei andere zerlegt. Es sei $f(p, x)=F(q, y)$; macht man $F(q, y)=\vartheta$, so ist auch $f(p, x)=\vartheta$.

Diese beiden Gleichungen geben, wenn man sie in Bezug auf p und q auflöst:

$$p=\psi(x, \vartheta), \quad q=\varkappa(y, \vartheta),$$

wodurch die Gleichung $dz=pdx+qdy$ in $dz=\psi dx+\varkappa dy$ übergeht. Integrirt man, indem ϑ als constant angesehen wird; so kommt:

$$z+\varphi\vartheta=\int\psi dx+\int\varkappa dy,$$

welches Resultat in Bezug auf ϑ allein zu differentiiren ist. Nachdem die Funktion φ bestimmt worden, bleibt ϑ zwischen diesen beiden Gleichungen zu eliminiren übrig.

Beispiel. Für $a^2pq=x^2y^2$ hat man:

$$\frac{ap}{x^2}=\frac{y^2}{aq}=\vartheta, \quad p=\frac{x^2\vartheta}{x}=\psi, \quad q=\frac{y^2}{a\vartheta}=\varkappa. \text{ Hieraus:}$$

$$3az+\varphi d=x^3\vartheta+\frac{y^3}{\vartheta}, \quad \varphi'\vartheta=x^3-\frac{y^3}{\vartheta^2}.$$

§. 236. Ist die Gleichung $Pp+Qq=R$ in Beziehung auf die Größen x, y, z homogen, so mache man $x=tz$, $y=uz$. Dadurch nehmen die Größen P, Q, R die Form P_1z^n, Q_1z^n, R_1z^n an und die Gleichungen (3) geben:

$$(P_1-tR_1)dz=zR_1dt, \quad (Q_1-uR_1)dz=zR_1du,$$

aus denen durch die Elimination von $\frac{dz}{z}$ erfolgt:

$$(P_1-tR_1)du=(Q_1-uR_1)dt.$$

Da diese Gleichung nur u und t enthält, so wird man ihr Integral suchen und damit t oder u aus einer der beiden vorhergehenden Gleichungen eliminiren und dann zu einer zweiten Integration schreiten. Eliminirt man endlich u und t mittelst $x=tz$ und $y=uz$; so findet man die Funktionen π und ϱ der Gleichungen (3), woraus das gesuchte Integral $\pi=\varphi\varrho$.

Beispiele: 1. Für $pxz+qyz=x^2$ hat man:

$$(1-t^2)dz=ztdt, \quad u(1-t^2)dz=zt^2du. \text{ Hieraus:}$$

$$udt=tdu, \quad t=\alpha u, \quad z\sqrt{(1-t^2)}=\beta; \text{ und daraus:}$$

$$x=\alpha y, \quad \sqrt{(z^2-x^2)}=\beta, \quad z^2=x^2+\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

2. Die Gleichung $pxz+qyz=xy$ gibt:

$$(1-ut)(udt-tdu)=0.$$

Das Integral von $udt-tdu$ ist $t=\alpha u$. Hieraus $\frac{dz}{z}=\frac{\alpha u\,du}{1-\alpha u^2}$, wovon das Integral ist: $z\sqrt{(1-\alpha u^2)}=\beta$. Daraus folgt $z^2-xy=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Integration der partiellen Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung.

§. 237. Die Differentialgleichungen von den zweiten Ordnung können außer den Differentialcoefficienten p und q der ersten Ordnung, auch noch folgende enthalten:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{d^2z}{dy\,dx}=s,\ \frac{d^2z}{dy^2}=t\ \ldots\ (A),\ \text{woraus:}$$

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy\ \ldots\ (B),$$

$$d^2z=dpdx+dqdy=rdx^2+2sdxdy+tdy^2.$$

Die Frage ist nun, die Gleichung:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \text{ zu integriren.}$$

Wir wollen deshalb einige der vorzüglichsten Gleichungen dieser Gattung betrachten.

Es sei zuerst $r=Pp+Q$ oder $\frac{d^2z}{dx^2}=P\frac{dz}{dx}+Q$, wo P und Q beliebige Funktionen von x und y bezeichnen. Da die Differentialcoefficienten q, s und t, welche sich auf die Aenderung von y beziehen, hier nicht vorkommen; so müssen wir y als constant ansehen und die hinzufügende Constante durch eine willkührliche Funktion von y bezeichnen. Substituiren wir dann p statt $\frac{dz}{dx}$, so haben wir folgende Gleichung zu integriren: $\frac{dp}{dx}=Pp+Q$, deren Integral, wenn blos x als variabel betrachtet wird, ist:

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{\int Pdx}\left(\int e^{-\int Pdx}Qdx+\varphi y\right).$$

Hieraus folgt, wenn man wieder blos x als veränderlich ansieht:

$$z=\int e^{\int Pdx}dx\left(\int e^{-\int Pdx}Qdx+\varphi y\right)+\psi y.$$

Ganz auf dieselbe Art wird man bei der Gleichung:

$$t=Pq+Q \text{ oder } \frac{d^2z}{dy^2}=P\frac{dz}{dy}+Q$$

verfahren und die willkührlichen Constanten in Funktionen von x verwandeln. Man wird so finden:

$$z=\int e^{\int Pdy}dy\left(\int e^{-\int Pdy}Qdy+\varphi x\right)+\psi x.$$

Beispiele: 1. Für $xyr=(n-1)py+a$ hat man:

$$P=\frac{n-1}{x},\ Q=\frac{a}{xy}.\ \text{ Daraus:}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-a}{(n-1)y}+x^{n-1}\varphi y,\ z=\frac{-ax}{(n-1)y}+\frac{x^n}{n}\varphi y+\psi y.$$

2. $xr=(n-1)p$ gibt $nz=x^n\varphi y+\psi y$.

3. Für $at=xy$ findet man $q=\frac{dz}{dy}=\frac{y^2x}{2a}+\varphi x$; ferner:

$$6az=y^3x+y\varphi x+\psi x.$$

4. $r=\frac{x}{ay}$ liefert $z=\frac{x^3}{6ay}+x\varphi y+\psi y$.

§. 238. Es sei die Funktion z aus $\frac{d^2z}{dx^2}=P\frac{dz}{dx}+Q$ zu bestimmen, wenn P und Q die Veränderlichen x, y und z enthalten. Da hier y als constant zu betrachten ist, so hat man eine Differentialgleichung von der zweiten Ordnung in Bezug auf die zwei Veränderlichen x und z. Man versuche daher die Integration dieser Gleichung nach den früher auseinandergesetzten Regeln; insofern dieselbe gelingt, setze man statt der beiden durch die Integration mitgebrachten Constanten die willkührlichen Funktionen φy und ψy.

Auf dieselbe Art wird man die Gleichung $\frac{d^2z}{dy^2}=P\frac{dz}{dy}+Q$ behandeln, wenn P und Q die Veränderlichen x, y und z zugleich enthalten:

Anmerkung. Die Auflösung unserer zwei Probleme ist daher als vollendet anzusehen, insofern die Auflösung aller Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung mit blos zwei Veränderlichen als bekannt angenommen wird.

§. 239. Das Integral von $s=P$ oder $\frac{d^2z}{dx\,dy}=P$ zu finden,

wenn P eine beliebige Funktion von x und y bezeichnet. Sieht man das erstemal x, das zweitemal y als unveränderlich an; so erhält man das Integral:

$$z=\int dx \int P dy+\varphi x+\psi y.$$

Hätte man zuerst y, dann aber x constant angenommen, so käme

$$z=\int dy \int P dx+\varphi y+\psi x,$$

welcher Werth eben so gut wie der vorhergehende genügt.

Beispiele. 1. Für $s=ax+by$ findet man:

$$z=\tfrac{1}{2} xy(ax+by)+\varphi x+\psi y.$$

2. $s=\sqrt{(a^2-y^2)}$ gibt das vollständige Integral:

$$z=\tfrac{1}{2} xy \sqrt{(a^2-y^2)}+\tfrac{1}{2} a^2 x \text{ arc}\left(\sin=\frac{y}{a}\right)+\varphi x+\psi y.$$

§. 240. Das Integral von $\frac{d^2z}{dx\,dy}=P\frac{dz}{dx}+Q$ zu bestimmen, wenn P und Q beliebige Funktionen von x und y sind.

Setzt man $\frac{dz}{dx}=p$, so kommt: $dp=Ppdy+Qdy$, was, wenn x constant genommen wird, das Integral:

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{\int P dy}\left(\int e^{-\int P dy} Q dy+\varphi x\right) \text{ gibt.}$$

Betrachtet man jetzt y als constant, so liefert die zweite Integration:

$$z=\int e^{\int P dy} dx\left(\int e^{-\int P dy} Q dy+\varphi x\right)+\psi y.$$

Ganz auf die nämliche Weise integrirt man die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dxdy}=P\frac{dz}{dy}+Q,$$

wenn P und Q blos x und y enthalten.

Beispiele: 1. $sxy=bpx+ay$ liefert:

$$p=\frac{-ay}{(b-1)x}+y^b \varphi' x, \text{ ferner } z=\frac{ay\, lx}{1-b}+y^b \varphi x+\psi y.$$

2. Für $\frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{y}{y^2+x^2}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{a}{x^2+y^2}$ findet man:

$$z=\frac{-ay}{x}+\int \varphi x dx \sqrt{(x^2+y^2)}+\psi y.$$

Anmerkung. Die hier gegebene Auflösungsmethode ist nicht mehr zureichend, wenn die beiden Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zugleich vorkommen, oder die Größen P und Q auch die Veränderliche z enthalten.

§. 241. Wir wollen jetzt zu der allgemeinen Gleichung von der zweiten Ordnung:

$$Rr+Ss+Tt=V \text{ oder } R\frac{d^2z}{dx^2}+S\frac{d^2z}{dx\,dy}+T\frac{d^2z}{dy^2}=V$$

übergehen, in welcher alle Differentialcoefficienten dieser Ordnung nur vom ersten Grade sind, und die Größen R, S, T und V auf eine beliebige Art x, y, z, p und q enthalten. Eliminiren wir r und t mittelst der Relationen (B), welche diesen Funktionen als Definition dienen; so finden wir:

$$Rdpdy+Tdqdx-Vdxdy=s(Rdy^2-Sdxdy+Tdx^2).$$

Können wir nun zu zwei Grundgleichungen $\pi=\alpha$ und $\varrho=\beta$ gelangen, welche den Gleichungen:

$$Rdy^2+Tdx^2=Sdxdy \text{ und } Rdpdy+Tdqdx=Vdxdy$$

genügen; so haben wir für das Integral der vorgelegten Gleichung $\pi=\varphi\varrho$, wo φ eine beliebige Funktion bezeichnet und π und ϱ die Größen x, y, z, p und q enthalten. Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, verwandeln wir zunächst unsere Gleichungen in andere, in denen die Differentiale nur auf dem ersten Grade vorkommen. Indem wir zu diesem Behufe $dy=\omega dx$ setzen, erhalten wir:

$$R\omega^2-S\omega+T=0 \ldots (1), \text{ und:}$$

$$dy=\omega dx,\ R\omega dp+Tdq=V\omega dx \ldots (2).$$

Die erste dieser Gleichungen liefert für ω zwei Werthe in x, y, z, p und q, während die Funktionen $\pi=\alpha$ und $\varrho=\beta$ dergestalt bestimmt sind, daß sie die Gleichungen (2) befriedigen.

Dieses vorausgesetzt, nehmen wir die vollständigen Differentiale von $\pi=\alpha$ und $\varrho=\beta$, welche Differentiale von der Form sind:

$$Adx+Bdy+Cdz+Ddp+Edq=0,\ adx+bdy+cdz+\ldots edq=0.$$

Substituiren wir in dieselben $pdx+qdy$ statt dz, ferner ωdx für dy, endlich für dq seinen aus (2) entnommenen Werth; so bekom-

men wir für jede dieser Gleichungen zwei andere, weil dx und dp ganz unabhängig von einander sind, nämlich:

$$A+\omega B+(p+q\omega)C+\frac{EV\omega}{T}=0,\ D=\frac{ER\omega}{T},$$

$$a+\omega b+(p+q\omega)c+\frac{eV\omega}{T}=0,\ d=\frac{eR\omega}{T},$$

welche Gleichungen die Bedingung aussprechen, daß π und ϱ den Relationen (2) Genüge thun. Differentiiren wir jetzt die Gleichung $\pi=\varphi\varrho$, so kommt:

$d\pi=\varphi'\varrho d\varrho$ oder $Adx+Bdy\ \ldots\ Edq=\varphi'\varrho(adx+bdy\ \ldots\ edq)$.

Substituiren wir hierin statt A, D, a, b ihre aus den vier obigen Gleichungen abgeleiteten Werthe und $pdx+qdy$ statt dz, vereinigen endlich die Glieder, in denen A, C, E, b, c, e Coefficienten sind; so finden wir, daß dieselben den einen oder den andern der Ausdrücke $R\omega dp+Tdq-V\omega dx$, $dy-\omega dx$ zu Faktoren haben, welche Ausdrücke in Folge der Relationen (2) verschwinden. Das erste Integral der vorgelegten Gleichung ist folglich $\pi=\varphi\varrho$, von welcher Beschaffenheit φ auch sein mag.

Auf diese Weise würden wir auf die Behandlung der Gleichungen (2) hingeführt, wobei jedoch wohl zu bemerken ist, daß außerdem noch die Relation $dz=pdx+qdy$ statt findet, was im Ganzen drei Gleichungen zwischen den fünf Veränderlichen x, y, z, p und q gibt. Es kann sich daher wohl ereignen, daß die Elimination zu einem Resultat mit drei Veränderlichen führt, das die im §. 222 aufgestellte Integrabilitätsbedingung unerfüllt läßt, in welchem Falle dasselbe nicht von einer primitiven Gleichung herrührt. Obschon wir zu einer unausführbaren Integration gelangt sind, so dürfen wir deswegen noch nicht die Folgerung ziehen, daß jede gegebene partielle Differentialgleichung, bei welcher jene Bedingung unerfüllt bleibt, auch von keiner einzigen primitiven Gleichung abstammen könne.

Aus dem Gesagten ergibt sich also folgende Regel: Um die partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung und des ersten Grades zu integriren, setze man die beiden Gleichungen (1) und (2) an; die erste bestimmt die Größe ω, deren Werth, in (2) eingeführt, zwei Gleichungen gibt, welchen man hierauf durch die Integrale $\pi=\alpha$ und $\varrho=\beta$ zu genügen suchen muß. Es bleibt alsdann die Gleichung von

der ersten Ordnung $\pi = \varphi\varrho$ noch zu integriren übrig. Von den zwei Werthen von ω, welche die Gleichung (1) darbietet, wird man denjenigen nehmen, welcher in den spätern Rechnungen die meisten Vortheile gewährt.

Anmerkung. Da in der Regel das Integral $\pi = \varphi\varrho$ außer den Veränderlichen x, y, z auch noch die Differentialcoefficienten p und q enthält; so ist dasselbe gewöhnlich ein erstes Integral. Das hier gelehrte Verfahren, welches von Monge herrührt, ist daher nur in den Fällen anwendbar, in denen ein solches Integral wirklich existirt; aber auch außerdem sind die Rechnungen bedeutenden Schwierigkeiten unterworfen, und selten gelingt das Auffinden der Ausdrücke π und ϱ.

§. 242. Nachstehende Beispiele mögen der Methode zur Erläuterung dienen.

1. Die Gleichung $q^2r - 2pqs + p^2t = 0$ gibt uns für die Gleichung (1): $q^2\omega^2 + 2pq\omega + p^2 = 0$, woraus $q\omega + p = 0$. Eliminirt man damit ω aus den Relationen (2), so kommt:

$$pdx + qdy = 0, \quad qdp = pdq.$$

Die zweite gibt $p = \beta q$, während die andere sich auf $dz = 0$ oder $z = \alpha$ reducirt. Hiernach ist $\beta = \varphi\alpha$ oder $p = q\varphi z$, was man von Neuem zu integriren hat.

Wendet man jetzt die im §. 231 angeführte Methode an, so erhält man $dz = 0$, $dy = -dx \cdot \varphi z$; hieraus $z = \alpha$, $y + x\varphi\alpha = \beta$. Setzt man $\beta = \psi\alpha$, so findet man das gesuchte Integral $y + x\varphi z = \psi z$, wo φ und ψ zwei willkührliche Funktionen sind.

2. Die Gleichung $rx^2 + 2xys + y^2t = 0$ gibt $\omega x = y$, wodurch die Gleichungen (2) werden:

$$ydx = xdy, \quad xdp + ydq = 0.$$

Aus der ersten folgt das Resultat $y = \alpha x$, mit Hülfe dessen die zweite in $dp + \alpha dq = 0$ übergeht; daraus entsteht $p + \alpha q = \beta$. Endlich gibt $\beta = \varphi\alpha$ das erste Integral $px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Die Gleichungen (2) im §. 231 sind jetzt:

$$dz = dx\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad xdy = ydx.$$

Die letzte liefert $y=\alpha x$, wodurch die erste sich in $dz=dx\cdot\varphi\alpha$ verwandelt, was $z=x\varphi\alpha+\beta$ gibt. Aus $\beta=\psi\alpha$ folgt endlich das Integral:

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

§. 243. In dem Falle, wo die Coefficienten R, S und T constant sind und V eine Funktion von x, y ist, liefert die Gleichung (1) für ω zwei numerische Werthe, welche wir mit m und n bezeichnen wollen. Das Gleichungssystem (2) gibt dann für die Wurzel m durch die Integration:

$$y=mx+\alpha \text{ und } Rmp+Tq=m\int Vdx,$$

wo das Integral $\int Vdx$ nur von einer einzigen Veränderlichen abhängt, weil man für y vermittelst seines Werthes $mx+\alpha$ wegschaffen kann.

Hiernach erhält man für das erste Integral der gegebenen Gleichung den Ausdruck:

$$Rmp+Tq=m\int Vdx+\varphi'(y-mx).$$

Auf dieselbe Art wird man mit der zweiten Wurzel n verfahren, oder vielmehr m mit n vertauschen; es ist jedoch hinreichend, sich mit einem der beiden Fälle zu beschäftigen, weil der andere zu dem nämlichen Endresultat führt.

Um nun zum zweiten Integral zu gelangen, nehmen wir wieder unser erstes Integral vor, suchen daraus den Werth von p und substituiren ihn in $dz=pdx+qdy$; es gibt uns dies, wenn wir erwägen, daß, vermöge der Natur der Wurzeln, $mn=\frac{T}{R}$ ist:

$$Rdz-dx\int Vdx-dx\varphi'(y-mx)=Rq(dy-ndx).$$

Die zu integrirenden Gleichungen werden demnach sein:

$$dy-ndx=0,\ Rdz-dx\int Vdx-d\varphi'(y-mx)=0; \text{ woraus:}$$

$$y=nx+c,\ Rz-\int dx\int Vdx-\int dx\cdot\varphi'(y-mx)=b.$$

Es ist gut, folgende, das Verfahren leitende, Bemerkungen hinzuzufügen:

1. In die zweite Gleichung ist $nx+c$ statt y zu setzen, und hierauf in Bezug auf x zu integriren; in dem Resultat wird man wieder statt c seinen Werth $y-nx$ einführen.

2. Um den Ausdruck $\int dx \int V dx$ zu erhalten, ist wohl zu bemerken, daß man, bei der ersten Integration für y seinen Werth $mx+\alpha$, wie schon oben gesagt wurde, dann in dem Resultat wieder statt α seinen Werth $y-mx$ setzen muß, während man, ehe die zweite Integration vollzogen wird, y mit $nx+c$ vertauscht, und im gefundenen Resultat wieder für c seinen Werth $y-nx$ substituirt.

3. Das Glied $\int dx \varphi'(y-mx)$ geht in $\int dx \varphi'[x(n-m)+c]$ oder in $\varphi[(n-m)x+c]$ über, weil die Funktion φ willkührlich ist. Das Integral dieses Gliedes ist daher $\varphi(y-mx)$, wenn man für c seinen Werth $y-nx$ setzt.

4. Endlich ist die Constante b eine beliebige Funktion ψ von c, oder $b=\psi(y-nx)$. Beachtet man das eben Gesagte, so wird das zweite Integral der gegebenen Gleichung sein:

$$Rz=\int dx \int V dx+\varphi(y-mx)+\psi(y-nx).$$

Beispiele: 1. Für $r-s-2t=\frac{k}{y}$ hat man:

$$m=1,\ n=-2,\ \text{und}\ y=x+\alpha,\ y=\alpha'-2x.\ \text{Folglich:}$$

$$\int V dx=\frac{kdx}{x+\alpha}=kl(x+\alpha)=kly;$$

$$\int dx \int V dx=\int kdxly=\int kdxl(\alpha'-2x)=-kx-kyl\sqrt{y},$$

nachdem $2x+y$ statt α' gesetzt worden. Das zweite Integral ist hiernach:

$$z+k(x+yl\sqrt{y})=\varphi(y-x)+\psi(y+2x).$$

2. Für die Gleichung $\frac{d^2z}{dx^2}=b^2\frac{d^2z}{dy^2}$, welche bei den schwingenden Saiten vorkommt, findet man als zweites Integral:

$$z=\varphi(y-bx)+\psi(y+bx).$$

§. 244. Zuweilen läßt sich die Integration mittelst eines dem im §. 235 mitgetheilten analogen Verfahrens bewerkstelligen, indem man nämlich die vorgelegte Gleichung mit Hülfe einer unbestimmten Größe ϑ in zwei andere zu zerlegen sucht. Hat man z. B. die Gleichung $rt=s^2$, so setze man $\frac{r}{s}=\vartheta=\frac{s}{t}$, woraus $r=s\vartheta$, $s=t\vartheta$; ferner:

$$rdx+sdy=\vartheta(sdx+tdy)\ \text{oder}\ dp=\vartheta dq$$

vermöge der Relation (B). Diese Gleichung wird nur integrabel sein, wenn ϑ eine Funktion von q ist; folglich $p=\varphi q$ das erste Glied.

Die Gleichung $dz = pdx + qdy$ wird dadurch $dz = dx \cdot \varphi q + qdy$. Hieraus folgt nach der im §. 234 gegebenen Methode, wenn man q constant annimmt, das Gleichungssystem:

$$z = x\varphi q + qy + \psi q, \quad x\varphi' q + y + \psi' q = 0.$$

Will man es für einen bestimmten Fall in Anwendung bringen, so muß man vorerst die Funktionen φ und ψ ermitteln und dann q eliminiren.

Anmerkung. Diejenigen Leser, welche Ausführlicheres über die partiellen Differentialgleichungen suchen, verweisen wir auf folgende, zum Theil schon erwähnte Werke:

1. Mémoires de l'académie des sciences de Paris.
2. Mathematische Abhandlungen der Berliner Akademie.
3. Application de l'analyse à la géométrie, par Monge.
4. Calcul différentiel et intégral, par Lacroix. Tome second.
5. Lehrbegriff der höhern Körperlehre von Lubbe.
6. Euler's Integralrechnung. Dritter Band.

Integration der partiellen Differentialgleichungen durch Reihen und Bestimmung der willkührlichen Funktionen.

§. 245. In den Fällen, wo eine geschlossene, endliche Form des allgemeinen Integrals nicht existirt, kann man dasselbe in Form von unendlichen Reihen zu erhalten suchen. Es sei z. B. die Gleichung $F(r, s, t \ldots x) = 0$ gegeben. Will man nun die Funktion $z = f(x, y)$ in eine nach den Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickeln, so setze man dem Maclaurinischen Lehrsatze zufolge:

$$z = f + xf' + \tfrac{1}{2}x^2 f'' + \tfrac{1}{6}x^3 f''' \ldots,$$

wo $f, f', f'' \ldots$ zu bestimmende Funktionen von y darstellen, und das sind, was aus z und seinen Derivirten in Bezug auf x wird, wenn man x gleich Null macht. Sucht man jetzt aus der vorgelegten Gleichung den Werth von r, so ist klar, daß, wenn man x mit 0, z mit f, p mit f', endlich s oder $\frac{dp}{dy}$ mit $\frac{df'}{dy}$ vertauscht, in dem Ausdrucke von r nur f, f' und ihre Derivirten in Bezug auf y vorkommen,

weil dann q in $\frac{df}{dy}$ und t in $\frac{d^2f}{dy^2}$ übergeht: auf solche Art verwandelt sich r in f''. Ebenso bestimmt die Derivirte von r in Bezug auf x den Coefficienten f''' mittelst derselben Funktionen f und f', die demnach beliebig sind und als willkührliche Funktionen von y angesehen werden können.

Aehnliches gilt für die partiellen Differentialgleichungen der höhern Ordnungen.

Beispiel. Es sei die Gleichung $\frac{d^2z}{dx^2}=b^2\frac{d^2z}{dy^2}$, welche die Funktion f und f' willkührlich läßt. Die Differentiation gibt uns:

$$\frac{d^3z}{dx^3}=b^2\frac{d^3z}{dxdy^2}=b^2\frac{d^2.\frac{dz}{dx}}{dy^2},$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=b^2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}=b^2\frac{d^2.\frac{d^2z}{dx^2}}{dy^2}=b^4\frac{d^4z}{dy^4},$$

$$\frac{d^5z}{dx^5}=b^2\frac{d^5z}{dx^3dy^2}=b^2\frac{d^2.\frac{d^3z}{dx^3}}{dy^2}=b^4\frac{d^4\frac{dz}{dx}}{dy^4}\text{ u. s. w.},$$

welche Ausdrücke sämmtlich von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ abhängen.

Bezeichnet man nun mit φy den Werth von z für x=0, und mit ψy den von $\frac{dz}{dx}$ unter derselben Voraussetzung; so erhält man:

$$z=\varphi y+\frac{x}{1}\psi y+\frac{x^2}{1\cdot 2}b^2.\varphi''y+\frac{x^3}{6}b^2\psi''y+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4\varphi^{4}y+\ldots$$

Anmerkung. Wäre die Funktion f(x, y) von solcher Beschaffenheit, daß eine von den Größen f, f', f'' . . . unendlich würde; so müßte man in der gegebenen Gleichung x in x—a verwandeln, wo a eine beliebige, dergestalt gewählte Constante bezeichnet, damit in den weiter auszuführenden Rechnungen das Unendliche verschwindet.

§. 246. Um Integrale in Form von unendlichen Reihen zu erhalten, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortlaufen, hat Lagrange die Methode der unbestimmten Coefficienten vorgeschlagen. Man schreibt zu dem Ende $z=\varphi+x\psi+x^2\chi+x^3\omega+\ldots$,

substituirt solchen Werth und seine Derivirten in die gegebene Gleichung $F=0$, ordnet das Resultat nach den Potenzen von x und setzt dann die einzelnen Coefficienten gleich Null. Aus diesen so erhaltenen Gleichungen müssen dann unsere Funktionen gefunden werden.

Beispiele: 1. Für $r=q$ hat man:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r=2\chi+6x\cdot\omega+\ldots$$

$$\frac{dz}{dy}=q=\varphi'+x\psi'+x^2\chi\ \ldots;$$

substituirt man diese Werthe in $r=q$, so findet man:

$$y=\varphi+x\psi+\tfrac{1}{2}x^2\varphi'+\tfrac{1}{6}x^3\psi'+\text{ꝛc.}$$

2. Die Gleichung $\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2z}{dt^2}=0$ verwandelt sich, wenn man $z=\varphi+x\psi+x^2\chi+x^3\omega\ \ldots$ setzt, wo φ, ψ, ... unbestimmte Funktionen von y und t sind, in:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\chi\\&+\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dt^2}+2\cdot3\omega\right)x\\&+\text{ꝛc.}\end{aligned}\right\}=0;$$

woraus

$$\chi=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right),$$

$$\omega=-\frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)\ \text{u. s. w.}$$

Hieraus $y=\varphi+x\psi-\frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)-\frac{x^3}{2\cdot3}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)+$ ꝛc.

Anmerkung. Wenn der Differentialcoefficient der höchsten Ordnung in der gegebenen Gleichung sich auf beide unabhängigen Variabeln bezieht, so kommen in der Entwicklung von z willkührliche Funktionen und Constanten vor, wie wir an dem Beispiel $\frac{d^2z}{dxdy}=z$ sehen werden. Man setze:

$$z=\varphi+x\psi+x^2\cdot\chi+\text{ꝛc.},$$

wo φ, ψ ... unbestimmte Funktionen von y sind. Substituirt man diesen Werth und den von $\frac{d^2z}{dxdy}$ in die gegebene Gleichung, so erhält man das Resultat:

$$z=\varphi(y)+\frac{x}{1}\int\varphi(y)dy+\frac{x^2}{1\cdot2}\int^2\varphi(y)dy^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\int^3\varphi(y)dy^3+ \text{rc.},$$

wo φy eine willkührliche Funktion ist und die verschiedenen Integrationen eine unendliche Anzahl von Constanten mit sich führen.

Poisson hat nachgewiesen, daß eine willkührliche Funktion an die Stelle aller dieser Constanten treten kann. Es ist zu diesem Ende hinreichend, $\varphi(y)$ in $\varphi(y)+A$,

$$\int\varphi(y)dy \text{ in } \int\varphi(y)dy+Ay+B,$$

$$\int^2\varphi(y)dy^2 \text{ in } \int^2\varphi(y)dy^2+\frac{A}{2}y^2+By+C \text{ u. s. w.}$$

zu verwandeln.

Die von dem Zeichen $\int$ befreiten Glieder bilden den Ausdruck:

$$A+Bx+\tfrac{1}{2}Cx^2+\ldots+(Ax+\tfrac{1}{2}Bx^2+\ldots)y+(\tfrac{1}{2}Ax^2+\ldots)y^2+\ldots,$$

welcher mit $\psi(x)+\frac{y}{1}\int\psi(x)dx+\frac{y^2}{1\cdot2}\int^2\psi(x)dx^2\ldots$ gleichbedeutend ist, wenn man;

$$A+Bx+\tfrac{1}{2}cx^2+\ldots=\psi(x) \text{ setzt.}$$

Das allgemeine Integral unserer Gleichung ist hiernach:

$$z=\varphi(y)+\frac{x}{1}\int\varphi(y)dy+\frac{x^2}{1\cdot2}\int^2\varphi(y)dy^2+\ldots$$

$$+\psi(x)+\frac{y}{1}\int\psi(x)dx+\frac{y^2}{1\cdot2}\int^2\psi(x)d\psi^2+\ldots$$

§. 247. Was die willkührlichen Funktionen φ, ψ, welche in den Integralen der partiellen Differentialgleichungen vorkommen, betrifft; so läßt sich von ihnen dasselbe aussagen, was wir von den willkührlichen Constanten, welche die gewöhnlichen Integrationen mit sich bringen, im §. 152 angeführt haben. So lange es sich nämlich um eine bloße Integration handelt, d. h. um die Bildung eines Ausdruckes, welcher, den Regeln der Differentialrechnung unterworfen, einer vorgelegten Gleichung genüge, sind dergleichen Funktionen φ, ψ . . . ganz willkührlich; sie hören aber auf es zu sein, sobald die Resultate auf bestimmte Probleme der Geometrie, Mechanik, Physik und Astronomie angewendet werden sollen.

Folgende Beispiele werden das hier Gesagte erläutern.

1. Für die Cylinderflächen hat man:

$$y-bz=\varphi(x-az) \text{ oder } ap+bq=1,$$

wovon die erste Gleichung das Integral der zweiten ist; die Form der Funktion φ hängt von der leitenden Linie ab. Soll die Basis des Cylinders eine in der Ebene xy liegende, durch die Gleichung $y = fx$ bestimmte Curve sein, so muß φ von solcher Art werden, daß die Basis unter den Punkten des Raumes, welchen die Gleichung $y - bz = \varphi(x - az)$ zukommt, begriffen sei. Macht man daher $z=0$, so müssen die Gleichungen $y = \varphi x$ und $y = fx$ identisch werden. Die Funktionen φ und f sind also von einerlei Form, d. h. vertauscht man in $y=fx$ die Größe y mit $y - bz$ und x mit $x - az$; so wird die daraus resultirende Gleichung dem in Frage stehenden Cylinder angehören.

Sind allgemein $M=0$, $N=0$ die Gleichungen der Leitlinie, so mache man $x - az = u$, verbinde dann diese drei Gleichungen, um daraus die Werthe von x, y, z, ferner den von $y-bz$ oder φu in u auszudrücken, und die Funktion φ wird bestimmt sein. Um die Gleichung der speziellen Cylinderfläche zu erhalten, ist dann nichts weiter nöthig, als $x-az$ statt u in $y-bz=\varphi u$ zu substituiren.

Beispiel. Die leitende Ellipse sei eine in der Ebene xy liegende Ellipse, deren Gleichungen sind:

$$z = 0 \text{ und } \frac{(x-\alpha)^2}{A^2} + \frac{(y-\beta)^2}{B^2} = 1.$$

Man findet für die gesuchte Gleichung der cylindrischen Fläche,

$$\frac{(x-az-\alpha)^2}{A^2} + \frac{(y-bz-\beta)^2}{B^2} = 1.$$

2. Die conoidischen Flächen haben die Gleichung $px+qy=0$, deren Integral $y = x \cdot \varphi z$ ist. Um die Funktion φ zu bestimmen, mache man $z=u$ und suche die Werthe von x, y und z in u mittelst der Gleichungen $M=0$, $N=0$, welche der Leitlinie angehören. Substituirt man hierauf für x und y ihre Werthe in $y = x \cdot \varphi u$, so wird man die Natur der Funktion φ gefunden haben. Indem man endlich z statt u schreibt, erhält man die unser Conoid particularisirende Gleichung $y=x \cdot \varphi z$.

Beispiel. Ist die Leitlinie ein Kreis, dessen Gleichungen $x=a$, $y^2+z^2=b^2$ sind; so hat man für dies Conoid die Gleichung

$$a^2 y^2 + z^2 x^2 = b^2 x^2.$$

3. Die allgemeine Gleichung der Kegelflächen ist:

$$z-c=p(x-a)+q(y-b), \text{ welche } \frac{y-b}{z-c}=\varphi\frac{(x-a)}{z-c}$$

zum Integral hat. Soll die Basis ein in der Ebene xy liegender Kreis sein, dessen Mittelpunkt sich im Ursprung befindet; so erhält man:

$$z=0, \ x^2+y^2=r^2, \ x-a=u(z-c) \text{ woraus:}$$
$$z=0, \ x=a-cu, \ y=\sqrt{[r^2-(a-cu)^2]}.$$

Indem man in $y-b=(z-c)\varphi u$ ihre Werthe setzt, kommt $c\varphi u=b-\sqrt{(r^2-(a-cu)^2)}$. Hieraus ergibt sich, wenn man wieder für u und φu die Werthe einführt:

$$(cy-bz)^2+(az-cx)^2=z^2(z-c)^2$$

als Gleichung des Kegels.

4. Für die Rotationsflächen, deren Umdrehungsachse mit der Achse der z zusammenfällt, besteht die Differentialgleichung $py=qx$, deren Integral $x^2+y^2=\varphi z$ ist. Um die Funktion φ zu bestimmen, setze man $z=u$ und drücke x, y, z mittelst der Gleichungen $M=0$, $N=0$, welche die Erzeugungslinie darstellen, in u aus; hierauf substituire man diese Werthe in $x^2+y^2=\varphi u$, wodurch die Funktion φ bestimmt sein wird. Man braucht jetzt nur noch z statt u und x^2+y^2 statt φu zu setzen, um die unserer besondern Rotationsfläche entsprechende Gleichung zu erhalten.

Beispiel. Ist die gegebene Curve eine Ellipse in der Ebene der xz, mithin die Gleichungen der Ellipse:

$$y=0, \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;$$

so findet man für das Rotationsellipsoid die Gleichung:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

§. 248. Diese Beispiele sind hinreichend, um zu zeigen, wie die willkührlichen Funktionen bestimmt werden, wenn die allgemeinen Resultate ihre Anwendung auf besondere Fälle finden sollen. Es sei allgemein $K=\varphi(L)$ das Integral, wo K und L gegebene Funktionen in x, y, z bezeichnen und es sich darum handelt, die durch φ dargestellte Funktion in der Art zu bestimmen, daß die Gleichung in $F(x, y, z)=0$ übergehe, wenn man $f(x, y, z)=0$ hat, wo F und f bekannte Funktionen andeuten. Diese Bestimmung der

willkührlichen Funktionen läuft darauf hinaus, die Oberflächen, welche den gegebenen Gleichungen entsprechen, durch gegebene krumme Linien hindurch gehen zu lassen. Um dieser Bedingung zu genügen, macht man $L=u$, und verbindet diese Gleichung mit $F=0$, $f=0$, um daraus Werthe für x, y, z zu ziehen. Substituirt man diese Werthe in K, welche dadurch eine Funktion von u wird, die wir mit K_1 bezeichnen wollen; so hat man $K_1=\varphi u$, wodurch die Funktion φ bestimmt ist. Indem man endlich L statt u und K statt φu setzt, erhält man das verlangte Integral.

Hat man zwei willkührliche Funktionen zu bestimmen, so muß man zwei Bedingungen haben.

§. 249. Wenn aber die Natur des Problems, wie es bei den meisten Aufgaben aus der Physik und der höhern Geometrie der Fall ist, die Bestimmung der willkührlichen Funktionen nicht gestattet; so sind dieselben ganz beliebig und die in Frage stehende Eigenschaft findet ganz allgemein statt, von welcher Beschaffenheit jene Funktionen auch sein mögen. Um unsere Erklärung der Geometrie zu entlehnen, wollen wir annehmen, daß ein Glied von der Form φx vorkomme, und in der Ebene xy eine Linie verzeichnen, welche $y=\varphi\alpha$ zur Gleichung hat. Die Ordinaten dieser Linie werden die Funktion φx darstellen, wobei diese Curve nicht blos ganz beliebig, sondern auch mit freier Hand beschrieben sein kann, wenn sie selbst ganz unregelmäßig wäre, sogar aus mehreren Theilen verschiedener Curven bestände. Dergleichen unregelmäßige Linien und Funktionen nennt man discontinuirliche, oder Linien und Funktionen ohne Continuität. Während also die gewöhnlichen Integrationen nur stetige Funktionen zulassen, erscheinen in der Rechnung mit partiellen Differentialgleichungen auch discontinuirliche Funktionen. Mehrere ausgezeichnete Geometer, selbst D'Alembert, welchen man als den Erfinder der Rechnung mit partiellen Differentialgleichungen ansehen kann, waren der Meinung, daß dies den Principien des Calculs widerstreite. Allein Euler setzte diese merkwürdige Eigenschaft der neuen Rechnung außer Zweifel, einer Rechnung, welche außerordentliche Hülfsmittel darbietet, Anwendungen der mannigfaltigsten Art gestattet und das Band abgibt, durch welches die discontinuirliche Funktionen in das Gebiet der mathematischen Analysis gezogen werden.



Noten zur Differentialrechnung.

Note I zu §. 81.

Ueber die Rectification der Curven.

Die Länge eines Bogens BM einer Curve (Fig. 1), deren Gleichung $y=fx$ in rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, können wir auch nach Lagrange etwa auf folgende Art bestimmen. Diese Länge BM ist offenbar eine Funktion von x, die wir mit Fx bezeichnen wollen. Für einen dem Punkt M hinlänglich nahe liegenden Punkt M' der Curve nehmen die Ordinaten derselben von M bis M' fortwährend zu oder ab, und es wird nothwendigerweise Bogen MM' größer als Sehne MM' und kleiner als die Summe der beiden Linien MH+HM' sein, wo MH die Berührende der Curve für den Punkt M ist. Bezeichnen wir nun PP' durch h, so ist Bogen $BM'=F(x+h)$, mithin Bogen $MM'=F(x+h)-Fx=\frac{dF}{dx}h+\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+$ x.

Es ist aber Sehne $MM'=(MQ^2+M'Q^2)^{1/2}=h(1+p^2+2pPh+P^2h^2)^{1/2}$, wenn man $\frac{dy}{dx}=p$ und $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3.}+\ldots=Ph^2$ setzt.

Entwickeln wir die Wurzelgröße nach dem Binom, indem wir $1+p^2$ als den ersten und $2pPh+P^2h^2$ als den zweiten Theil ansehen; so kommt Sehne $MM'=h(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+Qh^2$, wo Q das Aggregat aller Glieder, welche h enthalten, darstellt.

Ferner ist $MH=(MQ^2+HQ^2)^{1/2}=h\sqrt{(1+p^2)}$,
und $HM'=HQ-M'Q=-Ph^2$;
also $MH+HM'=h\sqrt{(1+p^2)}-Ph^2$.

Nach dem Gesagten muß also der Werth von $-(P+Q)h$ den von $\left[\frac{dF}{dx}-\sqrt{(1+p^2)}\right]-Qh+\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h}{1\cdot 2}+$ 2c. jederzeit an Größe übertreffen, wie klein man auch h nehmen mag, was nur der Fall sein kann, wenn $\frac{dF}{dx}=\sqrt{(1+p^2)}$, oder $dF=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ist.

Note II zu §. 82.

Ueber die Quadratur der Curven.

1) Der Flächeninhalt BCPM (Fig. 1), welcher von der Absciſſenachſe, von zwei auf derſelben Seite dieſer Achſe errichteten Ordinaten und dem zwiſchen dieſen letztern enthaltenen Bogen der Curven, deren Gleichung in geradlinigen Coordinaten $y=fx$ iſt, begrenzt wird, läßt ſich auch wie folgt beſtimmen.

Dieſer Flächeninhalt iſt eine Funktion von x, die wir wieder mit Fx bezeichnen wollen. Ziehen wir die Ordinate M′P′, ſo iſt, wenn PP′ durch h dargeſtellt wird; $BM'P'C=F(x+h)$; folglich $BM'P'C-BMCP =MPP'M'=\frac{dF}{dx}h+$ 2c., wenn wir den Taylor'ſchen Lehrſatz zu Hülfe nehmen. Für ein hinlänglich kleines h iſt aber der Bogen MM′ durchaus concav oder durchaus convex gegen die Absciſſenachſe, mithin ſind die Ordinaten von PM bis P′M′ fortwährend im Zu- oder Abnehmen begriffen. Daher für ein ſolches h das Flächenſtück MPP′M′ > als das Parallelogramm MPP′Q und < als das Parallelogramm PLM′P′, oder $M'LPP'-MPP'Q>MPP'M'-MPP'Q$.

Wenn wir hierin für die Flächenſtücke ihre Werthe ſetzen, und dabei den Coordinatenwinkel durch α bezeichnen; ſo haben wir, nachdem mit h dividirt worden:

$$\frac{dy}{dx}\sin\alpha\, h+\tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\sin\alpha\, h^2+\ldots>\left(\frac{dF}{dx}-y\sin\alpha\right)+\frac{hd^2F}{2dx^2}+ \text{2c.},$$

was für ein hinlänglich kleines h nur ſtattfinden kann, wenn $\frac{dF}{dx}=y\sin\alpha$ iſt.

2) Den Flächeninhalt BAM (Fig. 55), welcher von einem Bogen BM einer in Polarcoordinaten gegebenen Curve $u=ft$ und den beiden nach ſeinen Endpunkten gezogenen Leitſtrahlen begrenzt wird, kann man direct folgendermaßen beſtimmen. Man beſchreibe aus A mit $AM=u$ einen Kreisbogen MD, desgleichen aus A mit $AM'=u+\frac{du}{dt}h+\ldots.$

einen Kreisbogen $M'D'$, wobei die Winkel MAX und M'AX respectiv durch t und $t+h$ dargestellt sind. Der Sector ABM ist eine Funktion von t, welche mit Ft bezeichnet werden mag. Hiernach Fläche MAM' $=BAM'-BAM=F(t+h)-Ft=\frac{dF}{dt}h+$ ꝛc. Für ein gehörig kleines h nehmen die Leitstrahlen von AM bis AM' fortwährend zu oder ab; daher Fläche $MAM'>$ als Kreissector MAD und $<$ als Kreissector M'AD', oder $M'AD'-MAD>MAM'-MAD$.

Setzen wir hierin für die Flächenstücke ihre Werthe, so haben wir, nachdem durch h dividirt worden:

$$u\frac{du}{dt}h+\tfrac{1}{2}\left(\frac{du^2}{dt^2}+u\frac{d^2u}{dt^2}\right)h^2+\text{ꝛc.}>\frac{dF}{dt}-\frac{u^2}{2}+\frac{d^2F}{dt^2}\frac{h}{2}+\text{ꝛc.},$$

was für ein hinlänglich kleines h nur stattfinden kann, wenn $\frac{dF}{dt}=\frac{u^2}{2}$ ist.

Note III zu §. 117.

Von der Kubatur der Körper.

Der kubische Inhalt des Körpers, welcher zur Grundfläche das Rechteck AEPG (Fig. 38) in der Ebene xy hat, und von der krummen Oberfläche, deren Gleichung $z=f(x, y)$ ist, ferner von den Coordinatenebenen xz und yz, und endlich von den durch EP und PG diesen letztern parallel gelegten Ebenen begrenzt wird, ist eine Funktion von x und y, welche wir durch $F(x, y)$ darstellen wollen und um deren Bestimmung es sich handelt.

Es wird, wenn wir $GG'=h$ und $EE'=k$ setzen, der Körperinhalt über der Grundfläche GG'PR durch $F(x+h,y)-F(x,y)$, der über der Grundfläche GG'QS durch $F(x+h,y+k)-F(x,y+k)$, und der über der Grundfläche $PQSR=hk$ durch $F(x+h,y+k)-F(x,y+k)-F(x+h,y)+F(x,y)$ ausgedrückt sein. Legt man nun durch die vier Punkte M, K, J, C der Oberfläche Ebenen zu der Coordinatenebene xy parallel, so entstehen vier Parallelepipede, welche alle dieselbe Grundfläche PQRS und zu Höhen respectiv die vier Ordinaten PM, KR, JQ, SC haben. Da nun das erwähnte krummlinige Prisma zwischen dem größten und kleinsten dieser vier Parallelepipede eingeschlossen ist, so muß der Werth des Ausdrucks $F(x+h, y+k)-F(x+h, y)-F(x, y+k)+F(x, y)$ jederzeit zwischen dem größten und kleinsten Werth der Größen

$$hkf(x,y),\ hkf(x+h,y),\ hkf(x,y+k),\ hkf(x+h,y+k)$$

enthalten sein, wenn h und k jeden, wie auch immer kleinen Werth an-

nehmen können. Entwickeln wir die durch F und f angedeuteten Funktionen, so haben wir folgende Ausdrücke:

$$hk\frac{d^2F}{dxdy}+\frac{h^2k}{2}\frac{d^3F}{dx^2dy}+\frac{hk^2}{2}\frac{d^3F}{dy^2dx}+\text{ꝛc.},$$

$$hkf(x,y),$$

$$hkf(x,y)+h^2k\frac{df}{dx}+\text{ꝛc.},$$

$$hkf(x,y)+hk^2\frac{df}{dy}+\text{ꝛc.},$$

$$khf(x,y)+h^2k\frac{df}{dx}+hk^2\frac{df}{dy}+\text{ꝛc.}$$

Die Differenz zwischen zwei der vier letzten Ausdrücke ist von der Ordnung h^2k oder hk^2, d. h. von der dritten Ordnung in Bezug auf die Größen h und k, während die Differenz zwischen der ersten und einer der vier andern gleich $hk\left(\frac{d^2F}{dxdy}-f(x,y)\right)+$ Glieder von der dritten Ordnung.

Damit nun diese Differenz für gehörig kleine Werthe von h und k geringer als eine der vorhin erwähnten Differenzen, welche sämmtlich von der dritten Ordnung sind, werden können, muß $\frac{d^2F}{dxdy}=f(x,y)$ sein.

Note IV zu §. 118.

Von der Complanation der Flächen.

Mittelst eines ähnlichen Raisonnements findet man auch die krumme Oberfläche des Körpers oberhalb des Parallelogramms AP (Fig. 38 und 39), welche eine zu bestimmende Funktion von x und y ist. Bezeichnet man dieselbe mit $F(x,y)$, so ist

$$\text{die Oberfläche oberhalb } GR=\frac{dF}{dx}h+\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2}+\text{ꝛc.},$$

$$\text{die Oberfläche oberhalb } EQ=\frac{dF}{dy}k+\frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{1\cdot 2}+\text{ꝛc.},$$

$$\text{und die oberhalb } PS=\frac{d^2F}{dxdy}hk+\text{ꝛc.}$$

Legt man nun durch den Punkt M eine Berührungsebene an die krumme Fläche, so werden auf dieser Ebene die vier durch PR, PQ, QS, RS senkrecht auf xy errichteten Ebenen ein Parallelogramm $Mq's'r'$ bilden. Durch die Punkte M, q, r werde ein Dreieck, desgleichen eines

durch die Punkte r, q, C beschrieben; diese Dreiecke wollen wir die beiden Sehnendreiecke nennen. Auf den durch RS, QS, PQ und PR senkrecht auf xy gelegten Ebenen werden zwischen der Berührungsebene und den vier Seiten unserer zwei Sehnendreiecke, zwei Trapeze und zwei Dreiecke abgeschnitten, welche die vier Klappen heißen sollen. Nun ist klar, daß die krumme Fläche MqrC, welche durch $\frac{d^2F}{dxdy}hk +$ ꝛc. repräsentirt wird, größer als die Summe der beiden Sehnendreiecke und kleiner als das Parallelogramm der Berührungsebene nebst den vier Klappen ist. Die Projectionen des Sehnendreiecks Mqr auf den Coordinaten von xy, von yz und xz sind aber der Reihe nach:

$$\frac{hk}{2},\ \frac{k}{2}(Rr-MP) \text{ und } \frac{h}{2}(Qq-MP).$$

Desgleichen sind die Projectionen des Sehnendreieckes qrC auf jenen Ebenen:

$$\frac{hk}{2},\ \frac{k}{2}(CS-Qq) \text{ und } \frac{h}{2}(CS-rR).$$

Setzt man für MP, Qq, Rr und SC ihre analytischen Ausdrücke und nimmt den Satz aus der analytischen Geometrie im Raume zu Hülfe, wonach das Quadrat einer jeden ebenen Figur gleich ist der Summe der Quadrate ihrer auf die drei Coordinatenebenen projicirten Figuren; so findet man Sehnendreieck $Mqr = \frac{hk}{2}\sqrt{\left[1+(p+\frac{rh}{2}\ldots)^2+(q+\frac{tk}{2}\ldots)^2\right]}$

$$= \frac{hk}{2}\sqrt{(1+p^2+q^2+Ph+Qk)} = \frac{hk}{2}(\sqrt{[1+p^2+q^2]}+P'h+Q'k+ \text{ꝛc.});$$

ferner Sehnendreieck $rqC = \frac{hk}{2}(\sqrt{[1+p^2+q^2]}+P'_{,}h+Q'_{,}k+ \text{ꝛc.})$.

Daraus folgt für die Summe der beiden Sehnendreiecke:

$$hk\sqrt{(1+p^2+q^2)}+\alpha hk.$$

Auf der andern Seite ist die Projection des Parallelogramms der Berührungsebene auf der Ebene xy gleich hk, ferner des Cosinus des Winkels, welchen diese beiden Ebenen mit einander bilden, gleich $\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ (§. 103); folglich das Parallelogramm der Berührungsebene $= hk\sqrt{1+p^2+q^2}$, wenn man erwägt, daß die Projection irgend einer ebenen Figur gleich dem Inhalt der letztern multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels ist, welcher ihre Ebene mit der Projectionsebene macht.

Was die vier Klappen anlangt, so hat man

$$\text{Dreieck } Mrr' = \frac{h}{2}(Rr' - Rr) = -\tfrac{1}{2}h\left(\frac{rh^2}{2} + \text{rc.}\right),$$

$$\text{Dreieck } Mqq' = \frac{k}{2}(Qq' - Qq) = -\tfrac{1}{2}k\left(\frac{tk^2}{2} + \text{rc.}\right),$$

$$\text{Trapez } rr'Cs' = \frac{k}{2}(rr' + CS) = -\frac{k}{2}\left(\frac{tk^2}{2} + \text{rc.} + \frac{rh^2}{2} + \text{rc.}\right),$$

$$\text{Trapez } qq'Cs' = \frac{h}{2}(qq' + CS) = -\frac{h}{2}\left(\frac{tk^2}{2} + \text{rc.} + \frac{rh^2}{2} + \text{rc.}\right).$$

Für die Summe dieser vier Klappen nebst dem Parallelogramm der Berührungsebene hat man demnach den Ausdruck:

$$(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}hk + \beta kh,$$

wobei β wie α das Aggregat aller derjenigen Glieder darstellt, welche h und k, oder hk in einer höhern Potenz als der ersten enthalten. Nach dem Gesagten muß nun $\beta - \alpha > \frac{d^2F}{dxdy} - \sqrt{(1+p^2+q^2)} + \varphi$ sein, wo in $\frac{d^2F}{dxdy}$ wie in $\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ blos x und y, in β, α und φ aber außer x und y, noch h und k vorkommen, welche beide letztern Größen kleiner als jede angebliche Größe werden können. Daraus folgt dann

$$\frac{d^2F}{dxdy} = \sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Note V zu §. 89.

Ueber verschiedene bei dem Erdsphäroid vorkommenden Ausdrücke.

1) Man sieht die Erde als ein durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse erzeugtes Sphäroid an, von dessen Gestalt nämlich die der Erde nicht merklich abweicht. Die kleine Achse der erzeugenden Ellipse heißt die Erdachse, und die beiden Endpunkte desselben heißen die Pole des Sphäroids. Der von der großen Achse der erzeugenden Ellipse beschriebene Kreis wird der Aequator, und jeder Kreis, in welchem eine der Ebene des Aequators parallel geführte andere Ebene die Oberfläche des Sphäroids schneidet, ein Parallelkreis genannt. Jede durch die Achse des Sphäroids gelegte Ebene gibt auf derselben eine der erzeugenden gleiche Ellipse; die zwischen den beiden Polen liegenden Hälften einer solchen Ellipse heißen Meridiane. Die Breite eines Punktes des Sphäroids ist der spitze Winkel, unter welchem die durch jenen Punkt gehende Normale des durch denselben gezogenen Meridians gegen die große Achse

dieses Meridians geneigt ist. Unter Länge eines Punktes des Sphäroids versteht man den zwischen einem bestimmten, übrigens ganz willkührlichen Meridian, welcher der erste heißt, und dem Meridian jenes Punktes liegenden Bogen des Aequators, dessen Grade von dem ersten Meridian aus gezählt werden. — Der Meridiangrad ist der Bogen eines Meridians von solcher Länge, daß die durch seine beiden Endpunkte gezogenen Normalen einen Winkel von 1^0 mit einander bilden. Der Quotient aus der Differenz des Aequatorialhalbmessers über den Polarhalbmesser durch den Halbmesser des Aequators gibt die sogenannte Abplattung des Sphäroids.

2) Es sei AMB (Fig. 56) ein Meridian, die halbe große Achse AC=a, die halbe kleine Achse PC=b, CM ein an den Punkt M gehender Halbmesser des Meridians, MN eine Normallinie an M, und MF senkrecht auf CA. Der Winkel MNA wird die Breite des Punktes M sein, welche mit φ bezeichnet werde.

Die Gleichung des Meridians AMB ist: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ und jene der durch den Punkt M(x,y) gehenden Normale ist: $Y-y=\frac{a^2y}{b^2x}(X-x)$, Alles in der Ebene dieses Meridians gedacht; hiernach $\tang\varphi=\frac{a^2y}{b^2x}$. Bestimmt man mittelst dieser Gleichung und der des Meridians die Werthe von x und y, so erhält man, wenn $\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ gesetzt wird:

$$x=\frac{a\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \text{ und } y=\frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{1/2}}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe findet man für die große Normale MN'=N', d. h. für das bis zur kleinen Achse gehende Normalestück:

$$N'=\frac{a}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{1/2}};$$

für die kleine Normale MN=N, d. h. für das bis zur großen Achse gehende Normalestück:

$$N=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{1/2}};$$

für den Abstand MC=r des Punktes M vom Centrum des Sphäroids:

$$r=a\left(1-\frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)\sin^2\varphi}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\right)^{1/2};$$

und für den Krümmungshalbmesser ϱ des Punktes M des Meridians:

$$\varrho=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

3) Sind nun G, G′ zwei unter den Breiten φ und φ' gemessene Grade, und ϱ, ϱ' die dazu gehörigen Krümmungshalbmesser; so ist

$$\frac{G}{G'}=\frac{\varrho}{\varrho'};\ \text{folglich}\ \frac{\varrho}{\varrho'}=\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-3/2}}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi')^{-3/2}};$$

$$\text{hieraus}\quad \varepsilon^2=\frac{G^{2/3}-G'^{2/3}}{G^{2/3}\sin^2\varphi-G'^{2/3}\sin^2\varphi'}.$$

Sucht man zwei Hülfsmittel β und β' aus den Formeln

$$\left(\frac{G'}{G}\right)^{1/3}=\cos\beta\ \text{und}\ \left(\frac{G'}{G}\right)^{1/3}\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}=\cos\beta',$$

$$\text{so wird}\ \varepsilon=\frac{\sin\beta}{\sin\beta'\sin\varphi}.$$

Ist auf diese Weise ε bestimmt, so erhält man, weil $\frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$:

$$\frac{a-b}{a}=\tfrac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{2\cdot4}\varepsilon^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\varepsilon^6+\text{rc.}$$

als Ausdruck für die Abplattung des Sphäroids. Legt man die unter den Breiten 46°11′57″ und 66°20′10″ gemessenen Grade zum Grund, für welche 57020,77 und 57188,42 Toisen gefunden wurde; so ist

$$\varepsilon^2=0{,}00612957\ \text{und}\ \frac{a-b}{a}=\frac{1}{325{,}7}.$$

4) Da der dem Grad G entsprechende Krümmungshalbmesser $\varrho=\frac{180\,G}{\pi}$ ist, so hat man, weil $\varrho=a\frac{(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin\varphi)^{3/2}}$ gefunden worden; $a=\frac{180\,G}{\pi}\frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{(1-\varepsilon^2)}$.

Hat man mittelst dieser Formel a bestimmt, so läßt sich leicht b aus $b=a\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$ finden.

Für die eben angeführten Breiten gemessenen Grade ergibt sich hiernach a=3271415 und b=3261490 Toisen.

Note VI zu §. 109.

Von der Krümmung der Flächen.

1) Nimmt man in dem Ausdruck des Krümmungshalbmessers

$$\varrho=-\sqrt{(1+p^2+q^2)}\left\{\frac{1+p^2+2pqw+(1+q^2)w^2}{r+2sw+tw^2}\right\}\dots(1)$$

die Wurzelgröße $\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ stets negativ, so wird der Werth von ϱ immer das nämliche Zeichen wie sein Nenner haben; denn setzt man den

Zähler des Ausdrucks (1) gleich Null, so bekommt man für w nur imaginäre Werthe. Wegen der Relation $\gamma - z = \frac{-\varrho}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ besitzen auch ϱ und $\gamma - z$ immer einerlei Zeichen. Für ϱ positiv ist daher $\gamma > z$, d. h. der Krümmungshalbmesser, mithin auch der zugehörige Normalschnitt befindet sich oberhalb der Berührungsebene, wenigstens in der Nähe des betrachteten Punktes. — Für ϱ negativ ist $\gamma < z$, d. h. der Krümmungshalbmesser, folglich auch der correspondirende Normalschnitt liegt unterhalb der Berührungsebene, wenigstens in der Nachbarschaft des in Frage stehenden Punktes. Bei der hier oben gemachten Voraussetzung hinsichtlich der Wurzelgröße $\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ wird demnach die Formel (1) nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Krümmung jedes Normalschnitts anzeigen.

2) Um zu beurtheilen, ob alle Normalschnitte um denselben Punkt, ganz über oder ganz unter der Berührungsebene liegen, setze man den Nenner des Werthes von ϱ gleich Null; man findet dadurch

$$w = \frac{-s \pm \sqrt{(s^2 - rt)}}{t}.$$

Hieraus folgt, daß, wenn die Coordinaten des betrachteten Punktes auf der Fläche der Relation $rt - s^2 > o$ genügen, der Nenner in der Formel (1) sein Zeichen beibehält, welchen Werth auch w haben mag; in solchem Falle hat daher ϱ immer dasselbe Zeichen, d. h. die Fläche befindet sich um den betrachteten Punkt ganz über oder ganz unter der Berührungsebene. Ist dagegen $rt - s^2 < o$, so wird der Krümmungshalbmesser ϱ nach jedem der obigen Wurzelwerthe sein Zeichen ändern, d. h. die Normalschnitte liegen um den fraglichen Punkt theils über theils unter der Berührungsebene.

3) Die beiden Normalschnitte, von denen einer die kleinste Krümmung und der andere die größte gibt, heißen auch **Hauptschnitte** und die ihnen entsprechenden Halbmesser **Hauptkrümmungshalbmesser**. Um diese letztern auf eine bequeme Weise zu finden, kann man wie folgt verfahren. Aus dem allgemeinen Ausdrucke für ϱ folgt

$$\varrho(r+2sw+tw^2) + \{1+p^2+2pqw+(1+q^2)w^2\}\sqrt{(1+p^2+q^2)} = o.$$

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf ϱ und w, und setzt $\frac{d\varrho}{dw} = o$; so hat man $\varrho(s+tw) + \{pq+(1+q^2)w\}\sqrt{(1+p^2+q^2)} = o.$

Diese Gleichung mit w multiplizirt und von der vorhergehenden subtrahirt, gibt $\varrho(r+sw)+(1+p^2+pqw)\sqrt{(1+p^2+q^2)} = o.$

Eliminirt man aus den zwei letztern Gleichungen die Größe w, so kommt

$$(rt-s^2)\varrho^2+\{(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs\}\varrho\sqrt{(1+p^2+q^2)}+(1+p^2+q^2)^2=o,$$

eine Gleichung, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungshalbmesser sind.

Um die Relation kennen zu lernen, in welchen dieselben zu den übrigen Krümmungshalbmessern stehen, nehmen wir den betrachteten Punkt unserer Fläche zum Anfangspunkt der Coordinaten und die daselbst tangirende Ebene zu der Coordinatenebene xy an. Dadurch wird $p=q=o$ und unsere eben gefundene Gleichung verwandelt sich in:

$$(rt-s^2)\varrho^2+(r+t)\varrho+1=o; \text{ folglich } \varrho_1+\varrho_2=-\frac{r+t}{rt-s^2} \dots (2)$$

Wir können ferner die beiden Achsen in der Ebene xy dergestalt wählen, daß sie Tangenten an den beiden Hauptschnitten werden, indem, wie wir wissen, diese Schnitte sich stets unter einem rechten Winkel durchschneiden; alsdann muß aber von den Größen w_1 und w_2, welche sich auf ϱ_1 und ϱ_2 beziehen, die eine Null und die andere unendlich sein. Nun folgt aus der Formel (1), wenn $p=q=o$ ist:

$$\varrho=-\frac{1+w^2}{r+2sw+tw^2}=-\frac{\frac{1}{w^2}+1}{\frac{r}{w^2}+\frac{rs}{w}+t};$$

$$\text{woraus } \varrho_1=-\frac{1}{r}+\varrho_2=-\frac{1}{t}$$

$$\text{und } \varrho_1+\varrho_2=-\frac{r+t}{rt} \dots (3)$$

die vergleichende Zusammenstellung der Ausdrücke (2) und (3) zeigt, daß bei der Annahme eines solchen Coordinatensystems auch $s=o$ wird. Es besteht daher für dieses Coordinatensystem folgende Formel:

$$\varrho=-\frac{1+w^2}{r+tw^2} \text{ oder } \frac{1}{\varrho}=-\frac{r}{1+w^2}-\frac{tw^2}{1+w^2}.$$

Es sei α der Winkel, dessen Tangente w ist; man hat dann

$$\frac{1}{1+w^2}=\cos^2\alpha, \frac{w^2}{1+w^2}=\sin^2\alpha; \text{ ferner ist } \frac{1}{\varrho_1}=-r \text{ und } \frac{1}{\varrho_2}=-t.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck von $\frac{1}{\varrho}$, so erhält man für irgend einen Krümmungshalbmesser $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\alpha+\frac{1}{\varrho_2}\sin^2\alpha \dots (4)$; eine merkwürdige Relation, welche Euler zuerst angegeben hat, und mittelst

welcher man den Krümmungshalbmesser ϱ irgend eines Normalschnittes findet, wenn man den Winkel α, den er mit einem der beiden Hauptschnitte macht, nebst den Hauptkrümmungshalbmessern kennt.

4) Wenn die beiden Hauptkrümmungshalbmesser einerlei Zeichen haben, so folgt aus der Formel (4), welchen Werth auch α haben mag, daß ϱ dasselbe Zeichen wie ϱ_1 und ϱ_2 hat; in diesem Falle liegen daher alle Normalschnitte in der Nähe des betrachteten Punktes auf einerlei Seite der Berührungsebene. — Sind die zwei Hauptkrümmungshalbmesser einander gleich und mit einerlei Zeichen versehen, so lehrt die Formel (4), daß $\varrho=\varrho_1$, welchen Werth auch α haben mag; alle Normalschnitte besitzen daher um den betrachteten Punkt eine gleiche Krümmung.

Haben die Hauptkrümmungshalbmesser entgegengesetzte Zeichen, ist z. B. $\varrho 1$ positiv und $\varrho 2$ negativ; so ist $\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\alpha-\frac{1}{\varrho_2}\sin^2\alpha$.

Läßt man nun α von Null an bis dahin wachsen, wo $\tang \alpha=\sqrt{\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}$, so wird ϱ Anfangs positiv und gleich ϱ_1 sein und dann bis ins Unendliche zunehmen. Die diesen positiven Krümmungshalbmessern entsprechenden Schnitte liegen daher alle oberhalb der Berührungsebene. Läßt man hierauf α weiter wachsen, so wird ϱ negativ und nimmt numerisch ab bis $\alpha=90^0$, wo $\varrho=\varrho_2$ wird. Die diesen negativen Krümmungshalbmessern zugehörigen Normalschnitte liegen daher sämmtlich unterhalb der Berührungsebene.

Note VII zu §. 118.

Von dem Krümmungskreise der Curven von doppelter Krümmung.

Um den Kreis zu finden, der mit der Curve von doppelter Krümmung $z=fx$ und $y=\psi x$ eine Berührung der zweiten Ordnung eingeht, müssen wir nicht blos den Halbmesser und den Mittelpunkt dieses Kreises, sondern auch die Lage seiner Ebene im Raume bestimmen; wir sehen ihn daher als den Durchschnitt einer aus dem Centrum α, β, γ mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kugel und einer durch dieses Centrum geführten Ebene an. Die Gleichungen dieser Kugel und Ebene sind:

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2=\varrho^2,$$
$$X-\alpha+m(Y-\beta)+n(Z-\gamma)=0,$$

wo m und n zwei Constanten sind, welche die Lage unserer Ebene im Raume ausdrücken. Verwandelt man in diesen Gleichungen X, Y, Z in x, y, z und differentiirt sie zweimal; so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2,$$
$$x-\alpha+m(y-\beta)+n(z-\gamma)=0,$$
$$x-\alpha+y'(y-\beta)+z'(z-\gamma)=0,$$
$$1+my'+nz'=0,$$
$$1+y'^2+z'^2+y''(y-\beta)+z''(z-\gamma)=0,$$
$$my''+nz''=0,$$

welche die erforderlichen Bedingungen ausdrücken, um unserm Kreise eine Berührung der zweiten Ordnung mit der Curve von doppelter Krümmung, deren Coordinaten x, y, z sind, zu verschaffen.

Diese sechs Gleichungen sind hinreichend, um die sechs Unbekannten α, β, γ, ϱ, m und n, oder die Lage und Größe des Osculationskreises zu bestimmen. Die drei erstern geben sofort

$$x-\alpha=\frac{(ny'-mz')\varrho}{R},\ y-\beta=-\frac{(n-z')\varrho}{R},\ z-\gamma=\frac{(m-y')\varrho}{R},$$

wo der Kürze wegen $R=\{(ny'-mz')^2+(n-z')^2+(m-y')^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Substituirt man diese Werthe in die fünfte; so kommt

$$\varrho=\frac{(1+y'^2+z'^2)R}{(n-z')y''-(m-y')z''}.$$

Endlich geben die vierte und sechste Gleichung

$$m=\frac{z''}{z'y''-y'z''},\ n,=-\frac{y''}{z'y''-y'z''}.$$

Diese Werthe bestimmen die Lage der Krümmungsebene und sind mit denen im Texte gegebenen völlig gleichlautend. Mit Hülfe derselben findet man nach einigen Reductionen:

$$R=\frac{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}\cdot\sqrt{[y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2]}}{z'y''-y'z''};$$

$$\text{ferner } \varrho=\frac{-(1+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{[y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2]}},$$

$$\alpha=x-\frac{(1+y'^2+z'^2)(y'y''+z'z'')}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

$$\beta=y+\frac{(1+y'^2+z'^2)[y''+z'(z'y''-y'z'')]}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

$$\gamma=z+\frac{(1+y'^2+z'^2)[z''-y'(z'y''-y'z'')]}{y''^2+z''^2+(z'y''-y'z'')^2},$$

durch welche vier Gleichungen der Halbmesser ϱ des Krümmungskreises und die Coordinaten α, β, γ seines Mittelpunktes bestimmt werden. Die Gleichungen des geometrischen Orts der Krümmungsmittelpunkte der wie immer beschaffenen Curve ergeben sich, wenn man aus den drei letzten Gleichungen mittelst der gegebenen Gleichungen $z = fx$ und $y = \psi x$ derselben die Coordinaten x, y, z eliminirt.

Note VIII.

Von der Methode des Unendlichen.

I. Es ist schon im §. 22 der niedern Algebra bei Anwendung der Grenzmethode gezeigt worden, daß wenn man eine Gleichung zwischen Constanten und veränderlichen Größen hat, wovon die letztern kleiner als jede angebliche Größe werden können, und dabei bloß die zwischen den Constanten bestehende Relation der Gegenstand der Untersuchung ist, dann kein Fehler begangen wird, wenn man in der Rechnung einige Glieder vernachläßigt, von denen man weiß, daß sie der Natur des Verfahrens zufolge doch verschwinden müssen. Etwas Aehnliches fanden wir im §. 88 der analytischen Geometrie, als wir uns mit der Bestimmung der Berührungslinien an die Curven beschäftigten. Dergleichen Vernachläßigungen thun demnach der mathematischen Gewißheit nicht den mindesten Eintrag, insofern man überzeugt ist, daß dieselben sich nur auf solche Größen beziehen, welche durch die Natur der Operation aus dem Resultate ohnehin wegfallen. Man kann daher in jedem ähnlichen Falle dergleichen **unbestimmt kleine Glieder**, welche die Mathematiker mit Leibnitz **unendlich kleine Größen** genannt haben, ganz außer Acht lassen. Indem man sich so der Mühe überhebt, auf diese Größen Rücksicht zu nehmen, werden die Rechnungen bedeutend abgekürzt, weil es öfters schwierig ist, dergleichen Glieder gehörig zu schätzen, und die Resultate dennoch genau sein werden. Es ließe sich sogar diese Theorie mit aller mathematischen Schärfe aufstellen, insofern man bewiese, daß die weggelassenen Größen in der That zu der Klasse derjenigen gehören, welche unterdrückt werden müssen. Diese Methode hat ferner, nicht blos wenn es sich darum handelt, die Resultate dem Gedächtnisse einzuprägen, sondern auch bei schwierigen analytischen Untersuchungen ihre großen Vorzüge; weshalb es von Wichtigkeit ist, sich eines solchen mächtigen Hülfsmittels nicht zu entschlagen, zumal wenn man erwägt, daß man dem Verfahren die ihm scheinbar abgehende Strenge jederzeit wiedergeben kann.

II. Wir übergehen die Anwendungen dieser Theorie auf die Elemente der Geometrie, da sie sich ein Jeder leicht selbst zu ergänzen vermag, und schreiten sofort zu ihren Anwendungen in der Differentialrechnung.

Es seien y, z, t... beliebige, gegebene Funktionen von x; wenn nun x einen Zuwachs dx erhält, so werden die Zuwachse, welche y, z, t... dadurch bekommen, von den gegebenen Relationen, in denen diese Veränderlichen zu x stehen, abhängig sein und man wird haben: $dy = Adx + Bdx^2 + \ldots,\ dz = A'dx + B'dx^2 + \ldots, \ldots$ Welches nun auch der Zweck unserer Operation sein mag, so soll doch dy mit dz, dt... dergestalt combinirt werden, daß daraus eine gewisse Gleichung $M=0$ entstehe. Substituirt man jetzt darin statt dy, dz... ihre Werthe, so wird sich dx als gemeinschaftlicher Factor herausstellen, mithin in unserer Gleichung weggelassen werden können, so daß die ersten Coefficienten A, A'... allein kein dx mehr enthalten. Nun sind aber x, y, z... als bestimmte Größen anzusehen, während ihre Zuwachse dx, dy, dz... kleiner als jede andere noch angebliche Größe werden können, in der Art, daß für $dx=0$ die Gleichung $M=0$ alle Glieder B, B'... verliert. Man kann daher schon vornherein die Rechnung von diesen Gliedern befreien und $dy = Adx$, $dz = A'dx$... setzen; die übrigen vernachläßigten Glieder pflegt man unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung zu nennen, eine Benennung, die nur als ein abgekürzter Ausdruck zu betrachten ist.

Dieser Darstellungsweise zufolge sieht man die Größen als aus unbestimmt kleinen Theilen bestehend an, welche man Differentiale nennt und mit dem Buchstaben d bezeichnet. Diese Differentiale mit den wirklichen Elementen verglichen, sind nur um verschwindende Größen davon verschieden, d. h. um solche Größen, welche die Rechnung zum Verschwinden brächte, wenn man auch darauf Rücksicht nehmen würde. Die auf solche Betrachtungen gegründeten Resultate werden wegen dieser Art von Fehlern, welche man begeht, indem man jene unbestimmt kleine Größen statt der wirklichen nimmt, keineswegs ungenau sein. Diese sogenannte Methode des Unendlichen führt mit der Grenzenlehre zu einerlei Resultat, aber die erste ist offenbar einfacher und zur Anwendung bequemer, obschon sie übrigens nur als ein abgekürzter Ausdruck der andern, oder als ein bequemeres Mittel zu demselben Zwecke zu betrachten ist. Die Differentiale dx, dy von x, y sind nicht genau die Zuwachse dieser Veränderlichen, obgleich man sie als solche behandelt, weil statt $dy = Adx + Bdx^2$... blos $dy = Adx$ genommen wird: es sind vielmehr solche Größen, welche von den Zuwachsen um verschwindende Größen verschieden sind, d. h. um Stücke, welche durch die Rechnung von selbst wegfielen, wenn man darauf Rücksicht nehmen wollte, und die daher füglich ganz wegbleiben können. A ist das, was wir die Derivirte genannt und mit y' bezeichnet haben, die wir für jede Funktion herzuleiten wissen. Uebrigens ist es sehr leicht, von den eben auseinander gesetzten Prinzipien ausgehend, diese Derivirten von Neuem zu finden.

Folgende Beispiele werden hinreichen, um dem Leser diese zweite Behandlungsweise zu zeigen.

1) Es sei $y=zt$, wo z und t Funktionen von x sind. Man hat $dy=(z+dz)(t+dt)-zt=tdz+zdt$, wenn man das Produkt $dz \cdot dt$ vernachläßigt, welches nur dx^2, $dx^3 \ldots$ enthält.

2) Für $y=z^m$ hat man $dy=(z+dz)^m-z^m=mz^{m-1}dz$, wenn man die Glieder dz^2, $dz^3 \ldots$ wegläßt.

3) Es sei $y=a^z$; hieraus $dy=a^{z+dz}-a^z=a^z(a^{dz}-1)$. Nach §. 174 der höhern Algebra ist aber $a^h=1+kh+\ldots$; folglich $dy=ka^z dz$, wenn man die Glieder dz^2, $dz^3 \ldots$ unterdrückt.

4) $y=\text{Log}\, z$ gibt $z=a^y$; hieraus $dy=\text{Log}\,(z+dz)-\text{Log}\, z=\text{Log}\left(1+\frac{dz}{z}\right)$; folglich $a^{dy}=1+\frac{dz}{z}$. Nun ist $a^{dy}=1+kdy$; mithin $dy=\frac{dz}{kz}$.

III. Die Methode des Unendlichen besteht also, wie man sieht, darin, daß man in der Rechnung für die wirklichen Zuwachse, welche den Gegenstand derselben ausmachen, andere Größen von solcher Beschaffenheit substituirt, daß dadurch im Resultat nichts geändert wird. Anstatt der wirklichen Zuwachse, welche schwer zu behandeln wären und die Operationen unnöthigerweise verwickeln würden, nimmt man einfachere Größen, welche bei der beabsichtigten Untersuchung und den auszuführenden Rechnungen bequemer zu handhaben sind. Um aber dergleichen Größen mit Sicherheit einführen zu können, muß man vor Allem die Ueberzeugung gewinnen, daß dadurch kein Fehler entstehe, und daß, wenn man ihnen das Weggelassene hinzufügte, die addirten Stücke sich gegenseitig aufheben würden. — Damit unsere Methode mit völliger Sicherheit angewendet werden könne, muß einer unerläßlichen Bedingung, nämlich der Gleichheit der Grenzen Genüge geschehen, was verlangt, die wirklichen Größen mit den dafür substituirten zu vergleichen, hierbei sie gleichzeitig sich ändern zu lassen und zu sehen, ob bei ihrer fortschreitenden Verminderung das Verhältniß derselben sich fortwährend der Einheit nähert, welche in der That seine Grenze abgeben muß. So kann man, wenn ein Bogen BM (Fig. 1) den Zuwachs MM′ erhält, für den letztern die Sehne MM′ nehmen; diese Sehne ist nämlich das Differential des Bogens, weil in dem Maße die Punkte M und M′ einander näher rücken, der Bogen und die Sehne fortwährend abnehmen und ihr Verhältniß die Einheit zur Grenze hat. Keineswegs darf man aber MQ als das Differential von MM′ ansehen, unter dem Vorwand, daß MM′ und MQ sich der Gleichheit nähern und zusammen Null werden; denn

das Verhältniß $\frac{MM'}{MQ}$ hat nicht die Einheit zur Grenze. So haben ax^2 und bx, welche zusammen Null werden, das Verhältniß $\frac{ax}{b}$, dessen Grenze die Null und nicht die Einheit ist.

Bei der Vergleichung eines Kreisbogens mit seinem Sinus kann man den Zuwachs des einen für den des andern nehmen. Nun gibt $y=\sin z$ uns die Relation $dy=\sin(z+dz)-\sin z=\sin z \cos dz+\sin dz \cdot \cos z-\sin z$. Setzt man darin dz statt $\sin dz$ und 1 statt $\cos dz$, was hier erlaubt ist, weil das Verhältniß dieser Größen die Einheit zur Grenze hat; so findet man $dy=dz \cdot \cos z$. Ebenso erhält man für $y=\cos z$ die Relation $dy=\cos z \cos dz-\sin z \sin dz-\cos z=-dz \sin z$, wenn man das eben Gesagte dabei wieder berücksichtigt. Ein Prinzip, das man bei dieser Behandlungsweise nie aus den Augen verlieren darf, ist das Prinzip der Homogenität, welches darin besteht, daß die Differentiale jederzeit von der nämlichen Natur als die betrachtete Größe selbst und von derselben Ordnung unter einander sein müssen. Also ist das Differential einer Linie kein Punkt, das Differential einer Fläche keine Linie, das Differential eines Körpers keine Fläche; überdieß darf jede Differentialformel stets nur solche Glieder enthalten, worin die Differentiale von einerlei Ordnung sind. — Der hier aufgestellte Kunstgriff, welcher die Differentiale so behandelt, als wenn sie völlig genau wären, führt in der That zu unvollständigen Gleichungen; man kann deshalb aber ganz unbekümmert sein, weil man überzeugt ist, daß die Richtigkeit des Endresultats dadurch keineswegs gestört wird, sobald man ein eigentliches Grenzverhältniß in Aussicht hat, das für die wirklichen Elemente wie für deren stellvertretende Differentiale dasselbe ist. Diese Behandlungsweise bietet sich anfänglich als ein bloßes Annäherungsmittel dar, weil man Größen durch andere ihnen nahe liegende ersetzt. Da aber unsere Rechnung nur zur Ermittlung von Grenzverhältnissen, welche für die eigentlichen Größen wie für die Hülfsgrößen dieselben sind, bestimmt ist; so steht sie hinsichtlich der mathematischen Schärfe der Algebra keineswegs nach. Der Ausdruck und die Bezeichnung haben dort wie hier einerlei Genauigkeit, weil man mit den Worten unendlich kleine Größen oder Differentiale nichts anders sagen will, als daß man von unserer Rechnung nur in denjenigen Problemen Gebrauch zu machen gedenkt, welche nicht von den in Betracht genommenen Größen, sondern vielmehr von ihren Grenzverhältnissen abhängig sind. Kurz ein Differential ist ein Theil der Differenz, dessen Verhältniß zu dieser Differenz die Einheit zur Grenze hat.

IV. Diese Prinzipien finden in der Geometrie und Mechanik häufige Anwendung. Einige Beispiele von der erstern Art der Anwendung mögen jetzt folgen.

1) Für Curven auf rechtwinklige Coordinaten bezogen. Es sei $y=fx$ die Gleichung einer Curve, $BM=s$ (Fig. 1) ein Bogen derselben. Sieht man die Berührungslinie MT als die Verlängerung des unendlich kleinen Elements MM′ der Curve an, was nichts Anders heißt, als die Sehne des Bogens $MM'=ds$ kann der Linie MH so nahe kommen, als man nur immer will; so wird der Winkel M′MQ, dessen Tangente$=\frac{M'Q}{MQ}$ ist, von dem Winkel HMQ nur um eine unendlich kleine Größe verschieden sein. Das rechtwinklige Dreieck M′MQ, dessen Seiten dx, dy und ds sind, gibt dann

$$\text{Tang } T=\frac{dy}{dx},\ \cos T=\frac{dx}{ds},\ \sin T=\frac{dy}{ds}.$$

Da das Verhältniß des Bogen MM′ zu seiner Sehne sich ohne Ende der Einheit nähert, so kann man den Bogen ds statt der Sehne nehmen; das rechtwinklige Dreieck MM′Q liefert hiernach $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Nennt man t die Fläche CBMP, so kann man $MPP'Q=ydx$ für dt nehmen, weil der Flächeninhalt des Dreiecks $MM'Q=\frac{1}{2}dxdy$ eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung ist.

Es sei ABCD ... L (Fig. 57) irgend eine Curve, um die ein vollkommen biegsamer Faden gelegt ist, dessen einer Endpunkt in irgend einem Punkte L der Curve befestigt wird und dessen anderer Endpunkt sich in M befindet. Denkt man sich nun den Faden abgewickelt, dergestalt daß er immer angespannt bleibt; so wird der Punkt M eine andere Curve MM′M″ beschreiben. Diese neue Curve heißt die Evolvente der ersten und diese erste die Evolute oder Abgewickelte. Das in jedem Augenblick zwischen der Evolute und Evolvente enthaltene Stück des Fadens heißt der Halbmesser der Evolvente: hiernach ist für den Punkt M der Evolvente die Gerade MB dieser Halbmesser und die Gerade M′C derselbe für den Punkt M′. Betrachtet man jetzt die Evolute als ein Polygon von unendlich vielen Seiten AB, BC ..., so gehen die kleinen Stücke MM′, M′M″ ... der Evolvente in kleine Kreisbogen über, deren Mittelpunkte in den Punkten C, D ... liegen: es ist dieß der Grund, warum man die Kreise, welche bezüglich MC, M′D ... zu Radien haben und deren kleine Bogen mit jenen der Evolvente zusammenfallen, Krümmungskreise derselben an jenen Stellen genannt hat. Die Krümmungshalbmesser sind daher nichts anders als die Halbmesser der Evolvente. Um nun die

Größe derselben zu bestimmen, hat man die Gleichung Bogen $MM' = MC \cdot MCM'$, oder wenn man den Krümmungshalbmesser mit ϱ und den entsprechenden Bogen mit s bezeichnet: $ds = \varrho \cdot MCM' \ldots (1)$. Die Halbmesser MC, $M'D$ stehen aber respectiv senkrecht auf den kleinen Bogen MM', $M'M''$ oder auf den dazu gehörigen Berührungslinien MT', $M'T'$; mithin der Winkel MCM' gleich dem Winkel TRT', welchen diese Berührungslinien mit einander bilden. Ferner ist offenbar der letztere Winkel gleich dem Zuwachse, welchen bei dem Uebergange von einer Berührungslinie zur andern der Winkel erhält, den die Ordinate mit einer dieser Berührenden macht. Liegen daher die letztern Linien einander unendlich nahe, so wird ihr Winkel, folglich auch der Winkel MCM' der entsprechenden Krümmungshalbmesser MC, $M'D$ das Differential des Winkels, welchen die Berührungslinie der Curve mit deren Ordinate einschließt, sein.

Hiernach verwandelt sich unsere Relation (1) in $ds = \varrho \cdot d \cdot TMP, (2)$ wo MP die Ordinate der Curve ist.

Man hat aber $\tang TMP = \frac{dx}{dy}$ und

$$d \cdot TMP = \cos^2 TMP \cdot d \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dy^2}{ds^2} d \cdot \frac{dx}{dy};$$

dadurch wird die Gleichung (2):

$$ds = \varrho \cdot \frac{dy^2}{ds^2} d \cdot \frac{dx}{dy}, \text{ woraus}$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{dy^2 \cdot d\frac{dx}{dy}} = -\frac{ds^3}{dx\, d^2y}.$$

2) **Für Curven auf Polarcoordinaten bezogen.** Denkt man sich aus dem Pol (A) (Fig. 9) als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AM = u$ den unendlich kleinen Kreisbogen $MQ = u d\delta$ beschrieben, so kann dieser mit seiner, wie der Bogen der Curve $MM' = ds$ mit seiner Sehne MM' verwechselt werden. Ist nun AT senkrecht auf AM, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $MM'Q$ und TAM:

$$\frac{MQ}{M'Q} = \frac{AT}{AM} \text{ oder } \frac{u d\delta}{du} = \frac{AT}{u};$$

$$\text{folglich Subtangente } AT = \frac{u^2 d\delta}{du}.$$

Das rechtwinklige Dreieck TMA gibt

$$\tang TMA = \frac{AT}{AM} = \frac{u d\delta}{du}.$$

Betrachtet man das Dreieck $MM'Q$ als ein rechtwinkliges geradliniges Dreieck, so wird $MM'^2 = MQ^2 + M'Q^2$ oder $ds = \sqrt{(u^2 d\delta^2 + du^2)}$.

Das Differential des Inhalts ABM ist AMM', für welches man den Kreisausschnitt AMQ nehmen darf. Hiernach

$$dr = \frac{1}{2} AM \times MQ = \frac{1}{2} u^2 d\delta.$$

3) Complanation und Cubatur der Rotationskörper. Durch die Umdrehung des Bogens BM (Fig. 1) um die Achse Ax wird die Oberfläche u, und durch die Umdrehung des kleinen Bogens $MM' = ds$ die krumme Oberfläche eines abgestutzten Kegels erzeugt, welches das Differential du von u ist. Man hat daher

$$du = \frac{1}{2} MM'(\text{cir.}PM + \text{cir}P'M') = 2\pi y\, ds.$$

Es entsteht ferner durch Umdrehung der Fläche $CBRM$ der Körper v und durch jene des Trapezes $MPP'M'$ das Differential dv desselben, welches man als einen Cylinder ansehen darf, dessen kreisförmige Basis den Halbmesser y besitzt und dessen Höhe dx ist; folglich $dv = \pi y^2 dx$.

4) Complanation und Cubatur der Körper überhaupt. Es sei U die Oberfläche MN (Fig. 38 und 39) eines beliebigen Körpers. Läßt man jetzt bloß x um dx wachsen, so wird die Fläche der Zone BM das Differential $\frac{dU}{dx} dx$ von U sein. Aendert man hierauf y in $y + dy$ um, so ist die Fläche $MC = \frac{d^2U}{dxdy}$ das Differential der vorigen Zone. Diese Fläche MC kann man nun als mit dem Flächenstück $Mr's'q'$ zusammenfallend ansehen, welches auf der in M an die Oberfläche gelegten Berührungsebene liegt, und dessen Projection auf der Ebene xy das Rechteck $PS = dxdy$ bildet. Bezeichnet man den Neigungswinkel der erwähnten Berührungsebene gegen die Coordinatenebene xy mit α, so hat man $dxdy = Mr's'q' \times \cos\alpha$; folglich Fläche

$$MC = \frac{dxdy}{\cos\alpha} = dxdy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

$$\text{oder } d^2U = dxdy\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Ist ferner V der Inhalt des Körpers $EFMN$, so wird der Inhalt des Körpers $MBFR = \frac{\alpha V}{dx} dx$, und der des Körpers $MCSP = \frac{d^2V}{dxdy} dxdy$ sein. Sieht man nun diesen letztern als ein senkrechtes Parallelepiped von der Basis $dxdy$ und der Höhe z an, so hat man $\frac{d^2V}{dxdy} = z$.

Das Volumen eines Körpers auf Polarcoordinaten bezogen zu finden: — Es seie M ein beliebiger Punkt des Körpers, der Punkt A innerhalb desselben (Fig. 58) der Ursprung der Coordinaten, $u=AM$ der Abstand des Punktes M von A, $\psi=MAZ$ der Winkel des Radiusrectors u mit der positiven Achse der z, $\varphi=XAP$ der Winkel der Projection AP dieser Geraden auf der Ebene xy mit der Achse der x. Man verlängere AM bis zu einem andern Punkt M′ des Körpers und setze $AM'=u+du$; beschreibe dann aus A als Mittelpunkt die zwei Kreisbogen MN, M′N′ und setze Winkel $NAZ=\psi+d\psi$, und denke sich endlich die Ebene MAZ um AZ gedreht und in die Lage ZAR gekommen und setze $XAP'=\varphi+d\varphi$. Auf diese Weise entsteht eine erste Pyramide, deren Spitze in A liegt, deren Höhe $=u$ und Basis das hier als eben angesehene Element MNQR einer krummen Oberfläche ist, und eine zweite Pyramide, deren Spitze ebenfalls sich in A befindet, deren Höhe $=u+du$ und deren Basis das wieder als eben angesehene Element M′N′Q′R′ einer krummen Oberfläche ist. Nun hat man $MN=RQ=ud\psi$, ferner $MR=NQ=u\sin\psi\cdot d\varphi$, weil jeder Punkt des Vierecks MNN′M′ bei der Drehung der Ebene MAZ um die Achse AZ einen Kreisbogen $MR=d\varphi$ beschreibt, dessen Halbmesser das Perpendikel $MT=u\sin\psi$ von M auf die Rotationsachse AZ ist. Hiernach das Volumen S der ersten Pyramide $=\frac{1}{3}u^3\sin\psi\cdot d\psi\cdot d\varphi$ und jenes S′ der zweiten Pyramide $=\frac{1}{3}(u+du)^3\sin\psi\cdot d\psi\cdot d\varphi$.

Betrachtet man nun die Differenz $S'-S$ als das Element des Körpers, so hat man, wenn die Glieder du^2 und du^3 als unendlich kleine Größen höherer Ordnungen wegbleiben, für das Volumen des Elements folgenden Ausdruck: $u^2\sin\psi\cdot du\cdot d\psi\cdot d\varphi$; woraus der Inhalt des Körpers durch eine dreifache Integration gefunden wird.

Um den Inhalt des ganzen Körpers zu erhalten, muß man von $u=0$ bis $u=f(\varphi,\psi)$ integriren, wo f eine durch die Natur der Oberfläche bestimmte Funktion bezeichnet; hierauf das Integral des Resultats von $\psi=0$ bis $\psi=\pi$ und von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ suchen, wobei die Ordnung dieser beiden Integrationen ganz willkührlich ist.

Wendet man unsere Formel auf die Kugel an, deren Radius $=r$ und Mittelpunkt den Pol abgibt; so erhält man, wenn man von $u=0$ bis $u=r$ integrirt, weil hier u von ψ und φ unabhängig ist, für den Inhalt V der Kugel: $V=\frac{1}{3}r^3\iint\sin\psi\cdot d\varphi\cdot d\psi$.

Integrirt man jetzt von $\psi=0$ bis $\psi=\pi$, so kommt $V=\frac{2}{3}r^3\int d\varphi$. Wird endlich von $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$ integrirt, so hat man $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

Note IX.

Ueber die Einhüllungsflächen.

1) Es sei $M=f(x,y,z)=o$ die Gleichung einer Fläche, worin noch die zwei willkührlichen Constanten α, β vorkommen. Für bestimmte Werthe dieser Constanten wird $M=o$ ebenfalls eine bestimmte Oberfläche ausdrücken. Nimmt man jetzt in der Ebene xy eine willkührliche Curve $y=\varphi x$ an, und stellt dann zwischen β und α dieselbe Relation $\beta=\varphi\alpha$ auf; so kann man, nachdem β eliminirt worden, dem α nach und nach alle möglichen Werthe beilegen. $M=o$ wird auf solche Art die Gleichung einer Menge von Flächen darstellen, deren jede von der andern nur durch den besondern Werth von α verschieden ist. Das System aller dieser Flächen wird durch eine andere Fläche umschlossen werden, die wir mit Monge die Einhüllungsfläche nennen wollen. Differentiirt man nämlich die Gleichung $M=o$ der eingehüllten Flächen bloß in Bezug auf α, so gehören die beiden Gleichungen $M=o$ und $\frac{dM}{d\alpha}=o$ der Curve an, in welcher sich zwei nächst aufeinander folgende eingehüllte Flächen schneiden oder in welcher zwei dergleichen Flächen von der einhüllenden berührt werden: diese Curve hat Monge die Charakteristik der Einhüllungsfläche genannt. Eliminirt man daher α aus jenen beiden Gleichungen, so erhält man eine für alle Charakteristiken passende Gleichung, d. h. jene der Einhüllungsfläche selbst. Legt man in den beiden Gleichungen $M=o$, $\frac{dM}{d\alpha}=o$, nachdem α einen bestimmten Werth erhalten hat, demselben einen nächstfolgenden Werth $\alpha+d\alpha$ bei; so werden die Gleichungen $\frac{dM}{d\alpha}=o$, $\frac{d^2M}{d\alpha^2}=o$ der nächstfolgenden Charakteristik zukommen, welche die Vorhergehende im Allgemeinen in einem oder mehrern Punkten schneiden wird. Der Durchschnitt solcher zwei nächsten Charakteristiken wird hiernach durch die drei Gleichungen $M=o$, $\frac{dM}{d\alpha}=o$, $\frac{d^2M}{d\alpha^2}=o$ bestimmt. Giebt man in diesen drei Gleichungen dem α alle möglichen Werthe, so bekommt man die Aufeinanderfolge der Durchschnittspunkte je zweier nächsten Charakteristiken. Eliminirt man daher α aus jenen drei Gleichungen, so erhält man zwei andere Gleichungen in x, y, z, welche derjenigen Curve angehören, die von den auf einander folgenden Durchschnittspunkten je zwei nächster Charakteristiken gebildet wird. Wir wollen diese Curve die Wendungscurve (arète de rebroussement) nennen. Die Wendungscurve wird von allen Charakteristiken

eben so berührt wie die Einhüllungsfläche von allen eingehüllten Flächen berührt wird. Eliminirt man α aus den Gleichungen

$$M=o,\ \frac{dM}{d\alpha}=o,\ \frac{d^2M}{d\alpha^2}=o,\ \frac{d^3M}{d\alpha^3}=o;$$

so erhält man die Gleichungen für die Beugungs- oder Rückkehrpunkte der Wendungscurve, Punkte, deren Existenz an die Realität der Größen x, y, z gebunden ist.

2) Um das Gesagte durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, wollen wir die Einhüllungsfläche aller mit einem und demselben Halbmesser r beschriebenen Kugeln suchen, deren Mittelpunkte sich in einer auf der Ebene xy verzeichneten Curve $y=\varphi x$ befinden. Die Gleichung dieser Kugeln ist $(x-\alpha)^2+(y-b)^2+z^2=r^2$, oder, weil der Gleichung der erwähnten Curve gemäß, $b=\varphi\alpha$ gedacht wird, $(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2=r^2 \ldots (1)$.

Differentiirt man diese Gleichung zweimal in Bezug auf α, so hat man

$$(x-\alpha)+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha=o \ \ldots\ (2)$$

$$(y-\varphi\alpha)\varphi''\alpha-(\varphi'\alpha)^2-1=o \ \ldots\ (3).$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben für jeden einzelnen Werth von α die diesem α entsprechende Charakteristik. Eliminirt aber α aus den Gleichungen (1) und (2), so erhält man die Gleichung der Einhüllungsfläche. Verbindet man mit den Gleichungen (1) und (2) noch die Gleichung (3), so hat man nach vollbrachter Elimination von α die beiden Gleichungen der Wendungscurve.

Um dieß auf ein besonderes Beispiel anzuwenden, sei die Curve, welche der Mittelpunkt der Kugel durchläuft, ein Kreis vom Halbmesser ϱ; folglich $\varphi\alpha=\sqrt{(\varrho^2-\alpha^2)}$.

Hiernach verwandeln sich unsere drei Gleichungen in:

$$(x-\alpha)^2+[y-\sqrt{(\varrho^2-\alpha^2)}]^2+z^2=r^2 \ \ldots\ (1),$$

$$x=\frac{\alpha y}{\sqrt{(\varrho^2-\alpha^2)}} \ \ldots\ (2),$$

$$\frac{y\varrho^2}{\sqrt{(\varrho^2-\alpha^2)^3}}=o \qquad \ldots\ (3).$$

Eliminirt man α aus (1) und (2), so erhält man für die Einhüllungsfläche die Gleichung:

$$\varrho+\sqrt{(r^2-z^2)}=\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) zusammen genommen gehören für die Charakteristik; diese Linie ist eine ebene Curve, weil ihre Projection auf

xy eine Gerade ist, und liegt in einer auf xy senkrechten Ebene. Um die Natur der Charakteristik näher kennen zu lernen, wollen wir sie auf Coordinaten, welche in ihrer Ebene liegen, beziehen. Wir substituiren deßhalb in (1) für x, y, z respectiv die Werthe $x' \cos\psi$, $x' \sin\psi$, y' (siehe die analytische Geometrie im Raume, §. 50), wo für den Winkel ψ, welchen die Knotenlinie gedachter Ebene auf xy mit der Achse der x einschließt, die Relation $\tang \psi = \frac{\sqrt{(\varrho^2-\alpha^2)}}{\alpha}$ besteht. Wir erhalten dadurch die Gleichung $(x'-\varrho)^2+y'^2=r^2$; die Charakteristik ist daher ein Kreis, dessen Halbmesser $=r$, und dessen Mittelpunkt auf der Knotenlinie in der Entfernung ϱ vom Ursprung der Coordinaten liegt.

Note X.

Ueber die developpabeln Flächen.

1) Die Eigenschaft, welche die developpabeln (entwickelbaren) Flächen vor allen andern auszeichnet, ist, daß sie sich, wenn sie vollkommen biegsam und unausdehnbar wären, ohne Bruch und Verdoppelung in eine einzige Ebene ausbreiten lassen.

Diese Flächen können als aus ebenen Elementen von unbestimmter Länge bestehend angesehen werden, deren Breite aber unendlich klein ist, und die sich deßhalb in geraden Linien schneiden. Läßt man nämlich diese einzelnen Elemente sich um die geraden Linien, in welchen sie an einander grenzen, drehen, bis alle in die Ebene des ersten gekommen sind; so werden sich auf diese Art alle Elemente der Fläche, d. h. diese selbst in eine Ebene ohne Bruch und Verdoppelung ausbreiten lassen. Man kann jene Elemente als Theile einer sich bewegenden Ebene in ihren verschiedenen auf einander folgenden Lagen ansehen, wobei dieselbe sich nach einem vorgeschriebenen Gesetze bewegt, das für jede specielle developpabele Fläche ein anderes ist. Die cylindrischen und conischen Flächen sind nur als besondere Fälle in den developpabeln Flächen enthalten.

Wir wollen nun die allen developpabeln Flächen gemeinschaftliche Gleichung aufsuchen, von welcher Beschaffenheit auch die Bewegung der erzeugenden Ebene sein mag. Legt man zu diesem Behuf durch den Punkt x, y, z irgend einer developpabeln Fläche eine Berührungsebene, deren allgemeinen Coordinaten X, Y, Z sind; so hat man für diese Ebene die Gleichung: $Z=pX+qY+z-px-qy$.

Soll nun unsere Fläche wirklich developpabel sein, d. h. in die Berührungsebene ausgebreitet werden können; so muß es Aenderungen von x und y geben, welche auf die Coefficienten der Coordinaten X, Y, Z und auf das von den letztern unabhängige Glied keinen Einfluß

haben, oder mit andern Worten, das Zusammenbestehen der Gleichungen $dp=o$, $dq=o$, $d(z-px-qy)=o$ muß möglich sein. Da die letzte dieser Gleichungen in den beiden andern begriffen ist, so haben wir es bloß mit den Bedingungsgleichungen $dp=o$, $dq=o$, oder $rdx+sdy=o$, $sdx+tdy=o$, oder $r+sy'=o$, $s+ty'=o$ zu thun. Sie bestimmen die Richtung, in welcher man vom Punkt x, y, z aus auf der developpabeln Fläche fortgehen muß, ohne die Linie, in welcher sie die diesem Punkte entsprechende Berührungsebene trifft, zu verlassen. Eliminirt man y' aus jenen Gleichungen, so hat man $rt-s^2=o$ als Gleichung zwischen zweiten partiellen Differentialen für sämmtliche developpabeln Flächen.

2) Bewegt sich eine Ebene dergestalt, daß sie stets in allen auf einander folgenden Punkten einer gegebenen Curve senkrecht auf derselben bleibt; so wird das System der Durchschnitte je zwei nächstliegender Ebenen offenbar eine developpable Fläche bilden. Diese Fläche, als der geometrische Ort der auf einander folgenden Durchschnitte der beweglichen Ebene, kann hiernach als eine Einhüllungsfläche angesehen werden, während die bewegliche Ebene die eingehüllte Fläche ist. Die Charakteristik der developpabeln Fläche muß daher eine gerade Linie sein. Je zwei nächste Charakteristiken werden, wofern sie nicht parallel sind, sich in einem Punkte schneiden, und es wird der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte auf der developpabeln Fläche eine Wendungscurve bilden, welche von allen erzeugenden Geraden dieser Fläche berührt wird. Hieraus folgt, daß von jeder Geraden, welche sich längst einer gegebenen Curve sie stets berührend bewegt, eine developpable Fläche beschrieben wird, welcher diese Curve als Wendungscurve entspricht.

3) Wir wollen nun die Gleichung der developpabeln Fläche aus der Eigenschaft herleiten, daß sie immer senkrecht auf einer Curve $x=fz$ und $y=Fz$ stehen soll. Es sei deshalb $z=\alpha$ die Ordinate irgend eines Punktes der Curve und $z=Ax+By+C$ die Gleichung einer Ebene. Die Lage derselben wird völlig bestimmt sein, wenn sie durch jenen Punkt $z=\alpha$ der Curve geht und auf solcher senkrecht steht; die Coefficienten A, B, C, von welchen diese Lage abhängt, sind mithin auch völlig bestimmt und können als Funktionen von α angesehen werden. Die Gleichung der beweglichen Ebene, durch die eine developpable Fläche erzeugt wird, kann man daher unter folgender Form darstellen:

$$z=x\varphi\alpha+y\psi\alpha+\alpha \ldots (1)$$

Um den Durchschnitt zweier unendlich nahe liegender Ebenen zu erhalten, muß man die Gleichung (1) in Bezug auf α differentiiren.

Es giebt uns dieß: $x\varphi'\alpha+y\psi'\alpha+1=0$ ... (2), so daß das System der Gleichungen (1) und (2) die Erzeugungslinie der developpabeln Fläche darstellt, deren Gleichung mithin das Resultat der Elimination von α aus den beiden vorhergehenden ist. Diese Entwicklung läßt sich nicht eher ausführen, als bis man die Funktionen φ und ψ bestimmt, d. h. die developpable Fläche particularisirt hat.

4) Die Gleichung zwischen partiellen Differentialen für die developpabeln Flächen ergiebt sich sehr leicht aus dem System der zwei endlichen Gleichungen (1) und (2) mit zwei willkührlichen Funktionen. Differentiiren wir nämlich die Gleichung (1) sowohl in Bezug auf x und z, wie auch in Bezug auf y und z; so haben wir $p=\varphi\alpha$, $q=\psi\alpha$. Da hier p und q als Funktionen einer dritten Größe α erscheinen, so ist eine der erstern nothwendigerweise eine Funktion der andern, d. h. es ist $p=\pi q$ ... (3), welches die allgemeine Gleichung zwischen ersten partiellen Differentialen und einer willkührlichen Funktion für die developpabeln Flächen ist.

Die Gleichung (3) giebt, wenn man sie in Beziehung auf x, z und auf y, z differentiirt: $r=s\cdot\pi'q$ und $s=t\cdot\pi'q$; woraus $s^2=rt$ ... (4) als Differentialgleichung zwischen zweiten partiellen Differentialen für die developpabeln Flächen.

5) Um die Wendungscurve der developpabeln Fläche, d. h. den geometrischen Ort aller Durchschnitte der auf einander folgenden Erzeugungslinien zu erhalten, muß man aus dem System der drei Gleichungen:

$$z=\alpha+x\varphi\alpha+y\psi\alpha,$$
$$0=1+x\varphi'\alpha+y\psi'\alpha,$$
$$0=x\varphi''\alpha+y\psi''\alpha$$

die Größe α eliminiren.

6) Will man aus den Gleichungen $x=fz$ und $y=Fz$ einer Curve die der developpabeln Fläche herleiten, in welcher alle Tangenten derselben liegen; so hat man, wenn α die der Achse der z parallele Ordinate eines Berührungspunktes ist, für die Gleichung einer solchen Tangente:

$$x-f\alpha=(z-\alpha)f'\alpha \quad \ldots (5)$$
$$y-F\alpha=(z-\alpha)F'\alpha \quad \ldots (6).$$

Eliminirt man α aus diesen Gleichungen, so erhält man die Gleichung der developpabeln Fläche. Diese Elimination läßt sich wieder nicht eher ausführen, als bis die Funktionen f und F bestimmt sind. Differentiirt man die Gleichung (5) in Bezug auf x und z und die

Gleichung (6) in Bezug auf y und z; so findet man $1=pf'\alpha$ und $1=qF'\alpha$; woraus, wie zuvor, folgt $p=\varkappa q$.

7) Ist $z=K$ die Gleichung einer developpabeln Fläche, so gehört auch $z=K+Ax+By+C$, wenn A, B, C constante Größen sind, einer developpabeln Fläche an; denn wegen der doppelten Differentiation können die Größen Ax, By und C nebst ihren Differentialen keinen Einfluß auf die Bedingungsgleichung $rt=s^2$ äußern.

8) Die Fläche, deren Elemente zu ihrer Projection in der Ebene xy ein constantes Verhältniß haben, ist eine developpable. Man hat nämlich, wenn A eine constante Größe bezeichnet, hier die Relation:

$$Adxdy=dxdy\sqrt{(1+p^2+q^2)},$$

$$\text{oder } 1+p^2+q^2=A^2,$$

$$\text{oder endlich } p=fq,$$

wie es der Charakter der developpabeln Flächen mit sich bringt.

Note XI zu §. 127.

Ueber die Integration irrationaler Differentiale.

Hat man eine irrationale Differentialformel zu integriren, so muß man vorerst sehen, ob sie nicht durch irgend eine Substitution auf eine rationale Form gebracht werden könne. Unmöglich ist es dahin zu gelangen, wenn das Integral sich nicht durch Logarithmen und Kreisbogen, oder nicht in algebraischer Form darstellen läßt. Folgende aus Eulers Integralrechnung entlehnten Beispiele werden uns noch mehrere Substitutionsweisen angeben, durch welche man irrationale Differentialausdrücke in rationale umwandeln kann.

1) Es sei $y=\int dx\frac{\sqrt{(a+bx^2+cx^4)}}{a-cx^4}$. Um diese Formel rational zu machen, setze man $\sqrt{(a+bx^2+cx^4)}=xz$ oder $a+bx^2+cx^4=x^2z^2$.

Es entsteht daraus $dx=\frac{x^3zdz}{bx^2+2cx^4-x^2z^2}=-\frac{x^3zdz}{a-cx^4}$;

$$\text{folglich } y=-\int\frac{x^4z^2dz}{(a-cx^4)^2}.$$

Ferner ist $a+cx^4=(z^2-b)x^2$;

also $(a-cx^4)^2=(a+cx^4)^2-4acx^4=[(z^2-b)^2-4ac]x^4$.

Hiernach wird $y = -\int \frac{z^2 dz}{(z^2-b)^2-4ac}$, wo die Integration keine weitere Schwierigkeit darbietet. Ist sie vollendet, so substituirt man in dem Resultat, statt z den Ausdruck $\frac{\sqrt{(a+bx^2+cx^4)}}{x}$.

2) Auf dieselbe Weise läßt sich die allgemeinere Formel

$$y = \int \frac{x^{n-2}dx^n \sqrt{(a+bx^n+cx^{2n})}}{a-cx^{2n}}$$

rational machen.

Setzt man nämlich $\sqrt[n]{(a+bx^n+cx^{2n})} = zx$, woraus $z^n = \frac{a+bx^n+cx^{2n}}{x^n}$; so erhält man durch Differentiation $z^{n-1}dz = -\frac{dx(a-cx^{2n})}{x^{n+1}}$. Hieraus $dx = -\frac{z^{n-1}x^{n+1}dz}{a-cx^{2n}}$ und $y = \int \frac{-z^n x^{2n} dz}{(a-cx^{2n})^2}$.

Aus $a+cx^{2n} = (z^n-b)x^n$ ergibt sich aber

$$(a-cx^{2n})^2 = [(z^n-b)^2-4ac]x^{2n};$$

$$\text{folglich } y = \int \frac{-z^n dz}{(z^n-b)^2-4ac},$$

welcher Ausdruck in der That rational ist.

3) Um die irrationale Formel $dy = \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}}$ rational darzustellen, setzt Euler $\frac{x}{\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}} = z$.

Geht man zu den Logarithmen über, so kommt

$$lz = lx - \frac{1}{2n} l(a+2bx^n),$$

woraus durch Differentiation entsteht:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \frac{(a+bx^n)}{(a+2bx^n)}.$$

Die vorgelegte Formel verwandelt sich hiernach in:

$$dy = \frac{dz(a+2bx^n)}{(a+bx^n)^2}.$$

Aus $\frac{x}{\sqrt[2n]{(a+2bx^n)}} = z$ folgt nun $a+2bx^n = \frac{x^{2n}}{z^{2n}}$; diese letztere gibt

wieder $a^2+2bax^n=\frac{ax^{2n}}{z^{2n}}$, oder, wenn man auf beiden Seiten b^2x^{2n} hinzufügt, $(a+bx^n)^2=\frac{x^{2n}(a+b^2z^{2n})}{z^{2n}}$. Durch Substitution dieser Werthe geht unsere Formel endlich in den rationalen Ausdruck

$$dy=\frac{dz}{a+b^2z^{2n}}\text{ über.}$$

4) Durch eine ähnliche Substitution läßt sich auch in der Differentialformel $dy=\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})}}$ die Irrationalität wegbringen. Setzt man nämlich $z=\frac{x}{\sqrt[3n]{(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})}}$, geht dann zu den Logarithmen über; so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx(a+bx^n)^2}{x(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})}.$$

Die vorgelegte Differentialformel verwandelt sich hiernach in:

$$dy=\frac{dz(a^2+3abx^n+3b^2x^{2n})}{(a+bx^n)^3}.$$

Es ist aber $a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}=\frac{x^{3n}}{z^{3n}}$, woraus, wenn man auf beiden Seiten mit a multiplizirt und dann zu beiden Producten b^3x^{3n} addirt, entsteht: $(a+bx^n)^3=\frac{x^{3n}(a+b^3x^{3n})}{z^{3n}}$. Durch Substitution dieses Werthes findet man endlich den rationalen Ausdruck:

$$dy=\frac{dz}{a+b^3z^{3n}}.$$

Note XII zu §. 140.

Ueber das transcendente Integral $\int\frac{dx}{lx}$.

1) Das Integral $\int\frac{dx}{lx}$ ist wegen der mancherlei Schwierigkeiten, die es mit sich bringt, auf verschiedene Weise näher untersucht worden. Die interessantesten Nachforschungen über diese transcendente Funktion, welche den Namen Integrallogarithme erhalten hat und gewöhnlich durch lix bezeichnet wird, verdanken wir den Mathematikern Mascheroni, Soldner und Bessel. Auf eine höchst elegante Weise hat besonders der letztere diesen Gegenstand in dem Königsberger Archiv für

Naturwissenschaft und Mathematik (1. Band, Jahr 1812) behandelt, weshalb es uns gestattet sein mag, Einiges aus dieser schönen Arbeit hier aufzunehmen. Die im Text aufgestellte Reihe

$$lix = C + l(\pm lx) + lx + \frac{(lx)^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3}\cdots,$$

in welcher man $l(+lx)$ nehmen muß, wenn $x>1$, dagegen $l(-lx)$, wenn $x<1$, enthält eine allgemeine Auflösung der Aufgabe; nur ist diese Reihe wenig convergent, wenn man dem x einen sehr großen oder sehr kleinen Werth beilegt. Um nun eine convergirendere Reihe zu erhalten, geht Bessel von der bekannten Reihe:

$$lx = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \text{ꝛc.}$$

aus, die uns, da $lx = m\,lx^{\frac{1}{m}}$ ist, liefert:

$$lx = m\left[\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right) - \tfrac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)^3 - \ldots\right],$$

welche Reihe wegen der willkührlichen Größe m sich jederzeit beliebig convergent machen läßt. Hiernach hat man

$$\frac{1}{lx} = \frac{1}{m}\cdot\left[\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right) - \tfrac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)^3 \ldots\right]^{-1}$$
$$= \frac{1}{m\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)} + \frac{A}{m} + \frac{A'}{m}\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right) + \frac{A''}{m}\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)^2 + \text{ꝛc.}$$

Daraus folgt nun

$$\int\frac{dx}{lx} = lix = C + \int\frac{dx}{m\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)} + \frac{A}{m}x + \frac{A'}{m}\int\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)dx + \frac{A''}{m}\int\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)^2 dx + \text{ꝛc.}$$

oder, weil

$$\int\frac{dx}{m\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right)} = l\left(x^{\frac{1}{m}}-1\right) + x^{\frac{1}{m}} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{m}} + \ldots + \frac{1}{m-1}x^{\frac{m-1}{m}}\Big)$$

nachstehender einfacher, für $x=0$ verschwindender Ausdruck:

$$lix = l\Big[\pm\Big(x^{\frac{1}{m}}-1\Big)+x^{\frac{1}{m}}+\tfrac{1}{2}x^{\frac{2}{m}}+\tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{m}}\dots+\frac{1}{m-1}x^{\frac{m-1}{m}}$$

$$+\frac{Ax}{m}+\frac{A'x}{m}\left\{\frac{x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}}-1\right\}+\frac{A''x}{m}\left\{\frac{x^{\frac{2}{m}}}{1+\frac{2}{m}}-\frac{2x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}}+1\right\}$$

$$+\frac{A'''x}{m}\left\{\frac{x^{\frac{3}{m}}}{1+\frac{3}{m}}-\frac{3x^{\frac{2}{m}}}{1+\frac{2}{m}}+\frac{3x^{\frac{1}{m}}}{1+\frac{1}{m}}-1\right\}\Big]+\text{etc.}$$

2) Die Coefficienten $A, A'\ A''\dots$ sind aber, abgesehen vom Zeichen, genau dieselben, welche aus der Entwicklung von $\dfrac{1}{w+\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{3}w^3+\dots}$ in der nach steigenden Potenzen von w fortlaufenden Reihe

$$-\frac{1}{w}+B+Cw+Dw^2+Ew^3\dots$$

entstehen. Für letztere Coefficienten finden nun folgende Relationen statt:

$$\left.\begin{aligned}&B+\tfrac{1}{2}=0,\\&C+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{3}=0,\\&D+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{3}B+\tfrac{1}{4}=0,\\&E+\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{3}C+\tfrac{1}{4}B+\tfrac{1}{5}=0,\\&F+\tfrac{1}{2}E+\tfrac{1}{3}D+\tfrac{1}{4}C+\tfrac{1}{5}B+\tfrac{1}{6}=0\\&\qquad\text{etc.}\end{aligned}\right\}\text{woraus}\left\{\begin{aligned}&B=-\tfrac{1}{2}=-A,\\&C=-\tfrac{1}{12}=A',\\&D=-\tfrac{1}{24}=-A'',\\&E=-\tfrac{19}{720}=A''',\\&F=-\tfrac{3}{160}=-A'''',\\&\qquad\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Da das Gesetz dieser Werthe sich nicht sogleich zu erkennen gibt, so wollen wir zeigen, daß die Coefficienten $B, C, D\dots$ sämmtlich negativ sind und fortwährend abnehmen. Wir betrachten zu diesem Behufe die zwei dem $n$ten und $(n+1)$ten Glieder jener Coefficientenreihe entsprechenden Gleichungen:

$$N+\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{3}L\dots+\frac{1}{n-1}B+\frac{1}{n}=0,$$

$$P+\tfrac{1}{2}N+\tfrac{1}{3}M\dots+\frac{1}{n}B+\frac{1}{n+1}=0.$$

Die erste gibt

$$\frac{1}{n}=-\Big(N+\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{3}L\dots+\frac{1}{n-1}B\Big),$$

woraus $\frac{1}{n+1} = -\frac{n}{n+1}\left(N + \frac{1}{2}M + \frac{1}{3}L \ldots\ldots + \frac{1}{n-1}B\right)$;
wodurch die zweite in

$$P = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\right)N + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1} - \frac{1}{3}\right)M + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1} - \frac{1}{4}\right)L \ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{n}{n^2-1} - \frac{1}{n}\right)B$$

übergeht. Das Glied P ist also negativ, wenn die ihm vorhergehenden es alle sind, da ihre Multiplicatoren in dem vorstehenden Ausdrucke sich sämmtlich positiv herausstellen. Da derselbe mit dem Ausdrucke

$$P = -\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{3}M + \frac{1}{4}L \ldots + \frac{1}{n}B\right)$$

gleichbedeutend ist, so hat man, abgesehen vom Zeichen, $P < \frac{1}{n+1}$, welcher Bruch in dem Maße kleiner wird, als n wächst.

3) Die mit den Coefficienten A, A', A'' ... multiplizirten, eingeklammerten Funktionen von x bilden jederzeit eine convergente Reihe, wenn $x^{\frac{1}{m}} < 2$. Um dies einzusehen, brauchen wir blos jeden von den zwei dabei möglichen Fällen besonders zu betrachten, nämlich den, wo $x^{\frac{1}{m}}$ zwischen 1 und 2, und den, wo es zwischen 0 und 1 liegt. Im ersten Falle ist die $(n+1)$te jener Funktionen kleiner als $(x^{\frac{1}{m}} - 1)^n$, sie convergirt daher, weil $x^{\frac{1}{m}} - 1$ einen eigentlichen Bruch darstellt. Im zweiten Falle ist zwar gedachte Funktion größer als $(x^{\frac{1}{m}} - 1)^n$, convergirt aber, weil sie sich schneller als die letztere der Null nähert.

Aus dem Gesagten folgt, daß sich der Integrallogarithme stets berechnen läßt, wenn man m so wählt, daß $x^{\frac{1}{m}}$ kleiner als 2 wird.

Da, wenn x nur wenig größer als 1 ist, das Integral negativ, für ein großes x hingegen positiv wird; so muß es für einen dazwischen liegenden Werth von x Null sein: Bessel und Mascheroni haben gefunden, daß dieser bemerkenswerthe Punkt der Abscisse $x = 1{,}45136923495$ entspricht.

4) Das hier Gesagte kann man sich auch durch eine geometrische Construktion versinnlichen, insofern man sich die durch die Gleichung $y = \frac{1}{lx}$ ausgedrückte Curve verzeichnet denkt. Diese Curve besteht näm-

lich aus zwei von einander getrennten Theilen, wovon der eine, ganz unterhalb der Abcissenachse liegend, zwischen der Ordinatenachse und einer zu derselben in der Entfernung $+1$ parallel geführten Geraden enthalten ist, indem die Logarithmen von negativen Zahlen imaginär sind. Was den zweiten Theil der Curve anlangt, so befindet sich derselbe ganz oberhalb der Abscissenachse auf der rechten Seite der vorhin erwähnten Parallelen, welche eine gemeinschaftliche Asymptote der beiden Zweige unserer Curve abgibt, die im Ursprung plötzlich ihren Anfang nimmt. — Der zwischen der Curve, der Abscissenachse und gedachter Parallele eingeschlossene Raum ist negativ und unendlich groß; ebenso sind die auf der rechten Seite dieser Parallele liegende, von $x=1$ aus gezählten Räume positiv und unendlich groß. Für $x>1$ ist unser Integral also der Unterschied zweier unendlich großer Räume: es wird für $x<1$ negativ, für $x=1$ unendlich, für $x>1$ aber wieder endlich, wo es anfänglich negativ bleibt, hierauf $=0$, dann positiv und zuletzt für $x=\frac{1}{\infty}$ auch unendlich wird. Wir haben demnach hier einen Fall, wo der Unterschied zweier unendlich großer Räume eine endliche Größe ist.

Note XIII zu §. 151.

Integration einiger trigonometrischen Differentiale.

Nachstehende Differentialformeln kommen in den angewandten Theilen der Mathematik häufig vor, weshalb es nicht unpassend erscheinen wird, ihre Integrale hier aufzuführen.

I. Entwicklung des Integrals $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$.

Man setze mit Euler $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; hieraus folgt

$\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $a+b\cos x=\frac{a+b+(a-b)z^2}{1+z^2}$; also

$\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2dz}{a+b+(a-b)z^2}$, welche Formel drei verschiedene Fälle darbietet.

1) Für den Fall $a=b$ haben wir sofort

$$\int\frac{dx}{a+a\cos x}=\frac{1}{a}\int dz=\frac{1}{a}z=\frac{1}{a}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x+C,$$

weil aus der Gleichung $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ sich $z^2=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x$ ergiebt.

2) Für den Fall $a>b$ finden wir

$$\int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{ arc}\left[\text{tang} = \frac{(a-b)z}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\right];$$

folglich $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{ arc}\left[\text{tang} = \frac{(a-b)\text{tang}\frac{1}{2}x}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\right] + C.$$

3) Für den Fall $a<b$ bekommen wir

$$\int \frac{dz}{a+b+(a-b)z^2} = \frac{1}{2\sqrt{(b^2-a^2)}} \text{ l.} \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}+(b-a)z}{\sqrt{(b^2-a^2)}-(b-a)z};$$

folglich $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}} \text{ l.} \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}+(b-a)\text{tang}\frac{1}{2}x}{\sqrt{(b^2-a^2)}-(b-a)\text{tang}\frac{1}{2}x} + C,$$

oder $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}} \text{ l.} \left[\frac{b+a\cos x+\sin x\sqrt{(b^2-a^2)}}{a+b\cos x}\right] + C.$$

II. Entwicklung des Integrals $\int \frac{(f+g\cos x)dx}{(a+b\cos x)^n}$.

1) Man setze mit Euler

$$\int \frac{(f+g\cos x)dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{(B+C\cos x)dx}{(a+b\cos x)^{n-1}},$$

und suche die unbekannten Coefficienten A, B, C dieser Relation gemäß zu bestimmen. Differentiirt man deshalb die obige Gleichung, so hat man

$$f+g\cos x = A\cos x(a+b\cos x)+(n-1)Ab\sin^2 x+(B+C\cos x)(a+b\cos x),$$

oder $$\left.\begin{matrix} Ab \\ -(n-1)Ab \\ +Cb \end{matrix}\right\}\cos^2 x \quad \left.\begin{matrix} +Aa \\ +Bb \\ +Ca \\ -g \end{matrix}\right\}\cos x \quad \begin{matrix} +(n-1)Ab \\ +Ba \\ -f \end{matrix} = 0,$$

woraus, wenn die einzelnen Glieder $=0$ gesetzt werden, folgende Werthe entspringen:

$$A = \frac{ag-bf}{(n-1)(a^2-b^2)},\ B = \frac{af-bg}{a^2-b^2},\ C = \frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b^2)}.$$

Hiernach entsteht die Reductionsformel:

$$\int \frac{(f+g\cos x)dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{(ag-bf)\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}$$
$$\int dx \left[\frac{(n-1)(af-bg)+(n-2)(ag-bf)\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\right];$$

durch fortgesetzte Anwendung dieser Formeln kommt man, wenn a nicht gleich b und $n>1$ ist, immer auf das in I behandelte Integral zurück.

2) Für $n=1$ hat man aber

$$\int\frac{(f+g\cos x)dx}{a+b\cos x}=f\int\frac{dx}{a+b\cos x}+\frac{g}{b}\int\frac{(a+b\cos x-a)dx}{a+b\cos x},$$

oder $$\int\frac{(f+g\cos x)\,dx}{a+b\cos x}=\frac{g}{b}x+\frac{bf-ag}{b}\int\frac{dx}{a+b\cos x}+C,$$

wonach das gesuchte Integral auf das in I betrachtete wieder zurückgeführt ist.

3) Für $a=b$ ist

$$\int\frac{(f+g\cos x)dx}{a^n(1+\cos x)^n}=\int\left[\frac{f-g+g(1+\cos x)}{a^n(1+\cos x)^n}\right]dx$$

$$=\frac{f-g}{a^n}\int\frac{dx}{(1+\cos x)^n}+\frac{g}{a^n}\int\frac{dx}{(1+\cos x)^{n-1}}$$

$$=\frac{f-g}{2^{n-1}a^n}\int\frac{d\cdot\frac{1}{2}x}{\cos^{2n}\frac{1}{2}x}+\frac{g}{2^{n-2}a^n}\int\frac{d\cdot\frac{1}{2}x}{\cos^{2n-2}\frac{1}{2}x},$$

wodurch das gesuchte Integral auf das im §. 149 behandelte Integral zurückgeführt ist.

III. Bestimmung des Integrals $\int\varepsilon^{ax}\sin^n x\,dx$.

Man hat $\int\varepsilon^{ax}\sin^n x\,dx=\frac{1}{a}\varepsilon^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a}\int\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx$.

Auf dieselbe Weise findet man

$$\int\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx=\frac{1}{a}\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x\cos x-\frac{1}{a}\int\varepsilon^{ax}\left[(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x\right]dx,$$

oder $$\int\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx=\frac{1}{a}\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x\cos x-\frac{1}{a}\int[(n-1)\varepsilon^{ax}\sin^{n-2}x-n\,\varepsilon^{ax}\sin^n x]dx.$$

Hieraus folgt

$$\int\varepsilon^{ax}\sin^n x\,dx=\frac{1}{a}\varepsilon^{ax}\sin^n x-\frac{n}{a^2}\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n(n-1)}{a^2}\int\varepsilon^{ax}\sin^{n-2}x\,dx-\frac{n^2}{a^2}\int\varepsilon^{ax}\sin^n x\,dx.$$

Wird der letzte Ausdruck mit dem ersten verbunden, so kommt:

$$\int\varepsilon^{ax}\sin^n x\,dx=\frac{\varepsilon^{ax}\sin^{n-1}x(a\sin x-n\cos x)}{a^2+n^2}+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int\varepsilon^{ax}\sin^{n-2}x\,dx.$$

Für n=o und n=1 ergeben sich hiernach:

$$\int\varepsilon^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\,\varepsilon^{ax} \text{ und } \int\varepsilon^{ax}\,dx\sin x=\frac{\varepsilon^{ax}(a\sin x-\cos x)}{a^2+1},$$

auf welche Ausdrücke alle Fälle, wo n eine ganze positive Zahl ist, zurückgeführt werden können.

IV. Bestimmung des Integrals $\int\varepsilon^{ax}\,dx\cos^n x$.

Man hat auf eine ähnliche Art wie vorhin

$$\int\varepsilon^{ax}\cos^n x\,dx=\frac{1}{a}\,\varepsilon^{ax}\cos^n x+\frac{n}{a}\int\varepsilon^{ax}\cos^{n-1}x\sin x\,dx;$$

aber $\int\varepsilon^{ax}\cos^{n-1}x\sin x\,dx=\frac{1}{a}\,\varepsilon^{ax}\sin x\cos^{n-1}x-\frac{1}{a}\int\varepsilon^{ax}dx$
$[\cos^n x-(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x]$.

Folglich, weil der letzte Ausdruck mit

$$n\int\varepsilon^{ax}\cos^n x\,dx-(n-1)\int\varepsilon^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$$

gleichgeltend ist:

$$\int\varepsilon^{ax}\,dx\cos^n x=\frac{1}{a}\varepsilon^{ax}\cos^n x+\frac{n}{a^2}\,\varepsilon^{ax}\sin x\cos^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{a^2}\int\varepsilon^{ax}\cos^{n-2}x\,dx$$
$$-\frac{n^2}{a^2}\int\varepsilon^{ax}\cos^n x\,dx.$$

Hieraus entspringt

$$\int\varepsilon^{ax}\cos^n x\,dx=\frac{\varepsilon^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2}+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int\varepsilon^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$$

Für n=o und n=1 ergeben sich daraus

$$\int\varepsilon^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\,\varepsilon^{ax} \text{ und } \int\varepsilon^{ax}\cos x\,dx=\frac{\varepsilon^{ax}(a\cos x+\sin x)}{a^2+1},$$

auf welche Ausdrücke alle Fälle, in denen n eine ganze positive Zahl ist, zurückgeleitet werden können.

Note XIV zu §. 158.

Ueber einige bestimmte Integrale.

Bei vielen Anwendungen der Integralrechnung ist es von Nutzen, den Werth eines zwischen bestimmten Grenzen genommenen Integrals auszumitteln, obgleich das allgemeine Integral nur in unendlichen Reihen oder in einer andern unbequemen Form dargestellt werden kann. Euler,

Laplace, Legendre, Poisson, Fourier, Cauchy haben hierüber mannigfaltige interessante Resultate erhalten, von denen wir jetzt einige mittheilen wollen.

I. Bestimmung des Werthes des Integrals $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, wenn der Exponent m—1 kleiner als n ist.

1) Die Zerlegung des Bruches $\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$ in seine einfachen Brüche liefert uns:

$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1} = -\frac{2}{n}\frac{\left[x\cos\frac{m\pi}{n} - \cos\frac{(m-1)\pi}{n}\right]}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1},$$

$$-\frac{2}{n}\frac{\left[x\cos\frac{3m\pi}{n} - \cos\frac{3(m-1)\pi}{n}\right]}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1},$$

$$-\frac{2}{n}\frac{\left[x\cos\frac{5m\pi}{n} - \cos\frac{5(m-1)\pi}{n}\right]}{x^2-2x\cos\frac{5\pi}{n}+1},$$

. . . . . .

$$-\frac{2}{n}\frac{\left[x\cos\frac{\lambda m\pi}{n} - \cos\frac{\lambda(m-1)\pi}{n}\right]}{x^2-2x\cos\frac{\lambda\pi}{n}+1},$$

wo λ die ungerade Zahl bezeichnet, die zunächst kleiner als der Exponent n ist. Wenn n ungerade sein sollte, so kommt noch das Glied $(-1)^{m-1}\frac{1}{n(1+x)}$ hinzu.

Das Integral $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ läßt sich demnach auf folgende Weise darstellen, wenn der Kürze wegen $\frac{\pi}{n}=w$ gesetzt wird:

$$-\frac{2}{n}\cos mw\, l.\sqrt{(1-2x\cos w+x)^2}+\frac{2}{n}\sin m w\cdot arc\left(tang=\frac{x\sin w}{1-x\cos w}\right),$$

$$-\frac{2}{n}\cos 3mw l.\sqrt{(1-2+\cos 3w+x)^2}+\frac{2}{n}\sin 3mw\cdot arc\left(tang=\frac{x\sin 3w}{1-x\cos 3w}\right),$$

$$-\frac{2}{n}\cos 5mw l\cdot\sqrt{(1-2x\cos 5w+x)^2}+\frac{2}{n}\sin 5mw arc\left(tang=\frac{x\sin 5w}{1-x\cos 5w}\right),$$

. . . .

$$-\frac{2}{n}\cos\lambda mw l.\sqrt{(1-2x\cos\lambda w+x)^2}+\frac{2}{n}\sin\lambda mw.arc\left(tang=\frac{x\sin\lambda w}{1-x\cos\lambda w}\right).$$

Für ein ungerades n wird noch das Glied $(-1)^{m-1}\frac{1}{n}\, l\,(1+x)$ hinzugefügt.

2) Für $x=o$ verschwinden, n mag gerade oder ungerade sein, alle Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens; es kommt mithin nur noch darauf an, zu bestimmen, was aus diesen Gliedern für $x=\infty$ wird. Nehmen wir deshalb vorerst jene Theile, welche Logarithmen enthalten, so haben wir, da für $x=\infty$ offenbar $l\sqrt{(1-2x\cos\lambda w+x^2)}$ in lx übergeht, für die Summe jener logarithmischen Glieder den Ausdruck:

$$-\frac{2lx}{n}(\cos mw+\cos 3mw+\cos 5mw \ldots +\cos\lambda mw),$$

oder $-\frac{2lx}{n}(\cos mw+\cos 3mw+\cos 5mw \ldots +\cos\lambda mw)+(-1)^{m-1}\frac{lx}{n}$,

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Machen wir nun

$$\cos mw+\cos 3mw+\cos 5mw \ldots +\cos\lambda mw=S,$$

so erhalten wir, wenn mit $2\sin mw$ multiplicirt wird:

$$2S\sin mw=\sin 2mw+\sin 4mw+\sin 6mw \ldots +\sin(\lambda-1)mw+\sin(\lambda+1)mw$$
$$-\sin 2mw-\sin 4mw-\sin 6mw \ldots -\sin(\lambda-1)mw;$$

$$\text{folglich } S=\frac{\sin(\lambda+1)mw}{2\sin mw}.$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so wird $\lambda=n-1$ und die Summe der logarithmischen Theile $=-\frac{lx}{n}\cdot\frac{\sin m\pi}{\sin m w}$, weil $nw=\pi$ ist.

Da m eine ganze Zahl darstellt, so ist $\sin m\pi=o$, mithin verschwinden diese Theile. Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so wird $\lambda=n-2$, und die Summe der logarithmischen Theile ist

$$=\frac{lx}{n}\left\{-\frac{\sin(n-1)mw}{\sin mw}+(-1)^{m-1}\right\}=\frac{lx}{n}\left\{-\frac{\sin(m\pi-mw)}{\sin mw}+(-1)^{m-1}\right\}$$

$$=[(\cos m\pi+(-1)^{m-1}]\frac{lx}{n}=[(-1)^m+(-1)^{m-1}]\frac{lx}{n}=0.$$

Die Summe der logarithmischen Theile verschwindet daher jedesmal für $x=\infty$.

3) Es bliebe uns daher jetzt noch die Kreisbogen zu summiren übrig. Betrachten wir also den Ausdruck $\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\frac{x\sin\lambda w}{1-x\cos\lambda w}$; derselbe verwandelt sich für $x=\infty$ in $\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=-\operatorname{tang}\lambda m)=(\pi-\lambda w)$. Die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile wird hiernach

$$\frac{2}{n}[(\pi-w)\sin mw+(\pi-3w)\sin 3mw+(\pi-5w)\sin 5mw\ldots.+(\pi-\lambda w)\sin\lambda mw]$$

$$\text{oder } \frac{2\pi}{n}(\sin mw+\sin 3mw+\sin 5mw\ldots.+\sin\lambda mw)$$

$$-\frac{2w}{n}(\sin mw+3\sin 3mw+5\sin 5mw\ldots.+\lambda\sin\lambda mw).$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\cos mw+\cos 3mw+\cos 5mw\ldots.+\cos\lambda mw=\frac{\sin(\lambda+1)mw}{2\sin mw},$$

woraus, wenn diese Gleichung in Bezug auf w differentiirt wird, entsteht: $-m(\sin mw+3\sin 3w+5\sin 5w\ldots.+\lambda\sin mw)$

$$=\frac{(\lambda+1)m\cos(\lambda+1)mw}{2\sin mw}-\frac{m\sin(\lambda+1)mw\cos mw}{2\sin^2 mw};$$

folglich $\sin mw+3\sin 3mw+5\sin mw\ldots.+\lambda\sin\lambda mw$

$$=Q=\frac{\sin(\lambda+1)mw\cos mw}{2\sin^2 mw}-\frac{(\lambda+1)\cos(\lambda+1)mw}{2\sin mw}.$$

Für die andere Reihe $P=\sin mw+\sin 3mw+\sin 5mw\ldots.+\sin\lambda w$ bekommen wir, wenn beiderseits mit $2\sin mw$ multiplicirt wird:

$$2P\sin mw=1-\cos 2mw-\cos 4mw-\cos 6mw\ldots.-\cos(\lambda+1)mw$$
$$+\cos 2mw+\cos 4mw+\cos 6mw+\ldots.;$$

$$\text{folglich } P=\frac{1-\cos(\lambda+1)mw}{2\sin mw}.$$

Ist nun n eine gerade Zahl, so ist $\lambda=n-1$, und wir haben für die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile den Ausdruck:

$$\frac{\pi}{n}\frac{(1-\cos m\pi)}{\sin mw}+\frac{w}{n}\cdot\frac{n\cos m\pi}{\sin mw}=\frac{\pi}{n\sin mw},\text{ weil } nw=\pi.$$

Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so wird $\lambda = n - 2$, und wir haben für die Summe der die Kreisbogen enthaltenden Theile den Ausdruck:

$$\frac{\pi(1-\cos m\pi \cos mw)}{n \sin mw} + \frac{w(n-1)\cos m\pi \cos mw}{n \sin mw} + \frac{w \cos m\pi \cos mw}{n \sin mw}$$

$$= \frac{\pi}{n \sin mw}.$$

Aus dem Gesagten folgt also, m mag grad oder ungrad sein:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin m\frac{\pi}{n}}.$$

II. Bestimmung des Werthes des Integrals $\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$, wo m, n und p ganze positive Zahlen sein sollen.

1) Setzen wir zuvörderst mit Euler $1-x^n = y^n$, so ist

$$x^m = (1-y^n)^{\frac{m}{n}},\quad mx^{m-1}dx = -my^{n-1}dy(1-y^n)^{\frac{m}{n}-1};$$

woraus $\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = -\int_1^0 y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}$,

oder, wenn man die Grenzen des zweiten Integrals verwechselt,

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \int_0^1 y^{p-1}dy(1-y^n)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Da uns nichts hindert, im zweiten Gliede x statt y zu schreiben, so sieht man, daß der Werth des Integrals $\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$ unverändert bleibt, wenn man darin die Buchstaben m und p unter einander verwechselt.

Um die folgenden Rechnungen kürzer darstellen zu können, wollen wir für die Integralformel

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \int_0^1 x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$$

das Symbol $\varphi(m,p)$ schreiben, wo es gleichgültig ist, ob m vor p, oder p vor m gesetzt wird, d. h. man hat die Relation $\varphi(m,p) = \varphi(p,m) \ldots$ (1).

2) Durch Benutzung der im §. 131 aufgestellten Reductionsformel (A) erhalten wir:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = \frac{m-n}{m+p-n}\int_0^1 x^{m-n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}},$$

was uns die Relation $\varphi(m,p)=\frac{m-n}{m+p-n}\varphi(m-n,p) \ldots (2)$ gibt, vermittelst welcher die Fälle, in denen $m>n$ auf diejenigen, in denen $m<n$ zurückgeführt werden.

Setzen wir in der vorletzt vorhergehenden Gleichung m statt m—n,

so kommt $\int_0^1 x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{m}{m+p}\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$,

woraus $\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{m+p}{m}\int_0^1 x^{m+n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}$.

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man, wenn $(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}} = X$ gesetzt wird:

$$\int_0^1 x^{m-1}Xdx=\frac{(m+p)\,(m+p+n)\,(m+p+2n)\,\ldots\ldots\,(m+p+in)}{m\quad(m+n)\quad(m+2n)\quad\ldots\ldots\quad(m+in)}\int_0^1 x^{m+(i+1)n-1}Xdx.$$

Ganz auf dieselbe Weise hat man, wenn r eine ganze positive Zahl bezeichnet:

$$\int_0^1 x^{r-1}Xdx=\frac{(r+p)(r+p+n)(r+p+2n)\,\ldots\ldots\,(r+p+in)}{r\quad(r+n)\quad(r+2n)\quad\ldots\ldots\quad(r+in)}\int_0^1 x^{r+(i+1)n-1}Xdx.$$

Machen wir jetzt $(i+1)n=w$, $x^{m+w}=t$,

woraus $x^{m+w-1}dx=\frac{dt}{m+w}$, $x^{r+w-1}dx=\frac{t^{\frac{r-m}{m+w}}dt}{m+w}$;

so haben wir, wenn $(1-t^{\frac{n}{m+w}})^{\frac{p}{n}-1}=T$ gesetzt wird:

$$\int_0^1 Xx^{m+w-1}dx=\frac{1}{m+w}\int_0^1 Tdt,\ \int_0^1 Xx^{r+w-1}dx=\frac{1}{m+w}\int_0^1 Tt^{\frac{r-m}{m+w}}dt;$$

$$\text{folglich}\quad\frac{\int_0^1 Xx^{m+w-1}dx}{\int_0^1 Xx^{r+w-1}dx}=\frac{\int_0^1 Tdt}{\int_0^1 Tt^{\frac{r-m}{m+w}}dt}.$$

In dem Maße aber i, mithin auch w wächst, nähert sich $t^{\frac{r-m}{m+w}}$ mehr und mehr der Einheit, welcher sie so nahe gebracht werden kann, als man nur immer will. Mit dem Wachsen von w nähert sich daher auch das Integral $\int_0^1 Tt^{\frac{r-m}{m+w}}dt$ fortwährend dem Integral $\int_0^1 Tdt$, dem es sich beliebig nahe bringen läßt, wenn man nur i hinlänglich groß wählt. Es ist also mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit, insofern i hinlänglich groß genommen wird:

$$\frac{\int_0^1 Xx^{m-1}dx}{\int_0^1 Xx^{r-1}dx}=\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(r,p)}=\frac{(m+p)}{m}\frac{(m+p+n)}{(m+n)}\frac{\ldots}{\ldots}\times\frac{r}{(r+p)}\frac{(r+n)}{(r+p+n)}\frac{\ldots}{\ldots},$$

was man auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\frac{\int_0^1 Xx^{m-1}dx}{\int_0^1 Xx^{r-1}dx}=\frac{r}{m}\cdot\frac{(m+p)(r+n)(m+p+n)\ (r+2n)\ .\ .\ .\ .}{(m+n)(r+p)(m+2n)\ (r+p+n)\ .\ .\ .\ .}$$

Es ist aber $\int_0^1 x^{n-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}=\frac{1}{p}$; folglich, wenn in der vorstehenden Formel r=n gesetzt wird:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p-n}{n}}=\frac{n}{mp}\cdot\frac{2n(m+p)}{(m+n)p+n)}\cdot\frac{3n(m+p+n)}{(m+2n)(p+2n)}\cdot$$
$$\frac{4n(m+p+2n)}{(m+3n)p+3n)}\ \text{ꝛc.}$$

Setzt man m+q statt r in dem Ausdruck von $\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(r,p)}$, so bekommt man:

$$\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(m+q,p)}=\frac{(m+p)(m+p+n)\ \ldots\ldots}{m(m+n)\ \ldots\ldots}\cdot\frac{(m+q)(m+q+n)\ \ldots\ldots}{(m+q+p)(m+q+p+n\ \ldots\ldots},$$

in welcher Gleichung das zweite Glied unverändert bleibt, wenn man die Buchstaben p und q unter einander verwechselt; woraus die Relation

$$\frac{\varphi(m,p)}{\varphi(m+q,p)}=\frac{\varphi(m,q)}{\varphi(m+p,q)}\ \ldots\ldots\ (3)\ \text{entspringt.}$$

3) Ist p=n, so hat man blos $\int x^{m-1}dx$, woraus $\varphi(m,n)=\frac{1}{m}$;

ferner wegen $\varphi(m,p)=\varphi(p,m)$ die Relation $\varphi(n,m)=\frac{1}{m}$ und $\varphi(n,p)$ $=\frac{1}{p}$ .... (4).

Ist $n-m=p$, so wird das Integral $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}$ rational gemacht, wenn man $\frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}=z$ setzt. Denn man hat dann $\frac{x^m}{\sqrt[n]{[(1-x^n)]^m}}=z^m$, $x^n=\frac{z^n}{1+z^n}$, $nlx=nlz-l(1+z^n)$, $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z(1+z^n)}$; mittelst welcher Ausdrücke das Integral $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}$ sich in $\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$ verwandelt. Weil nun für $x=o$, $x=1$ bezüglich $z=o$ und $z=\infty$ wird; so ist $\int_o^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}}=\int_o^\infty\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$.

Man hat folglich, wenn man das in I. Gesagte berücksichtigt:

$$\varphi(m,n-m)=\varphi(n-m,m)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\ \ldots.\ (5)$$

4) Macht man in der Relation (3) $q=n-m-p$, so entspringt daraus:

$$\varphi(m,p)\varphi(m+p,n-m-p)=\varphi(m,n-m-p)\varphi(n-p,p);$$

ändert man ferner in derselben Relation (3) p in $n-m-p$ und q in $n-m$ um, so ergibt sich:

$$\varphi(m,n-m-p)\varphi(n-p,n-m)=\varphi(m,n-m)\varphi(n,n-m-p).$$

Indem wir diese Gleichung mit der vorhergehenden Glied für Glied multipliciren, erhalten wir, nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors $\varphi(m,n-m-p)$, die Gleichung:

$$\varphi(m,p)\varphi(m+p,n-m-p)\varphi(n-p,n-m)=\varphi(n-p,p)\varphi(m,n-m)\varphi(n,n-m-p).$$

Es ist aber den Relationen (4) und (5) gemäß

$$\varphi(n,n-m-p)=\frac{1}{n-m-p},$$

$$\varphi(m+p,n-m-p)=\frac{\pi}{n\sin\frac{(m+p)\pi}{n}},$$

$$\varphi(m, n-m) = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}},$$

$$\varphi(n-p, p) = \frac{\pi}{n \sin \frac{p\pi}{n}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die obige Gleichung erhält man folgende Relation:

$$\varphi(m,p)\varphi(n-p, n-m) = \frac{\pi \sin \frac{(m+p)\pi}{n}}{n(n-m-p) \sin \frac{m\pi}{n} \sin \frac{p\pi}{n}} \quad \ldots \ (6).$$

Macht man darin $p=m$, so kommt

$$\varphi(m,m)\varphi(n-m, n-m) = \frac{2\pi \cot \frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)} \quad \ldots \ (7).$$

Macht man dagegen $m=n-2p$, so entspringt

$$\varphi(n-2p, p)\varphi(n-p, 2p) = \frac{\pi}{np \sin \frac{2p\pi}{n}} \quad \ldots \ (8).$$

5) Nach Entwicklung obiger Sätze über die Function $\varphi(m,p)$, welche jedoch außerdem noch sehr viele andere, zum Theil sehr merkwürdige Relationen enthält, die man in Euler's Integralrechnung (1. u. 4. Band), in dem Traité du calcul différentiel et intégral par Lacroix (Tome troisième) und in den Exercices de calcul intégral par Legendre aus einander gesetzt findet, wollen wir nur noch Weniges über die Vereinfachung der Form der Function $\varphi(m,m)$ anführen.

Wir setzen zu diesem Behufe $1-x^n = \frac{z^n}{4x^n}$,

woraus $x = (\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)})^{\frac{1}{n}}$, $\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-p}{n}}} = \frac{[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}]^{\frac{m}{n}-1}}{[\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}]^{1-\frac{p}{n}}}$

$$\times \mp \tfrac{1}{4} \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{(1-z^n)}}.$$

Für p=m erhält man

$$\frac{[\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}]^{\frac{m}{n}-1}}{[\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}]^{1-\frac{m}{n}}}=\left[(\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}(\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)})\right]^{\frac{m}{n}-1}$$

$$=(\tfrac{1}{4}z^n)^{\frac{m}{n}-1}=2^{-2\frac{m}{n}+2}\,z^{m-n};$$

$$\text{folglich}\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}=2^{-\frac{2m}{n}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(1-z^n)}}.$$

Die Grenzen des Integrals in z ergeben sich aus der Betrachtung der Gleichung $4x^n(1-x^n)=z^n$. Setzt man darin x=o und x=1, so hat man in dem einen wie in dem andern Falle z=o, mithin nur eine und dieselbe Grenze. Man findet aber deren zwei, wenn man das Integral in x zuerst von o bis zu demjenigen Werthe von x, welcher dem z=1 entspricht, und dann es von diesem letztern bis x=1 ausdehnt. Für z=1 hat man aber $x^n=\frac{1}{2}$ oder $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$; man muß daher das Integral $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}$ von x=o bis $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, und dann von $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ bis x=1 ausdehnen, was so viel heißt, als das Integral $\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(1-z^n)}}$ von 0 bis 1 und dann von 1 bis 0, oder das Doppelte seines Werthes zwischen den Grenzen z=o und z=1 nehmen. Es ist folglich $\varphi(m,m)=2^{1-\frac{2m}{n}}\int_0^1\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(1-z^n)}}=2^{1-\frac{2m}{n}}\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\ldots(9)$, weil es erlaubt ist, x statt z zu schreiben.

Eben so hat man $\varphi(n-m,n-m)=2^{1-\frac{2(n-m)}{n}}\int_0^1\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$.

Durch Multiplication dieser beiden letzten Gleichungen entsteht:

$$\varphi(m,m)\varphi(n-m,n-m)=\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\cdot\int_0^1\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Die Zusammenstellung dieser Formel mit der Relation (7) liefert uns folgende Formel:

$$\int_0^1\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\cdot\int_0^1\frac{x^{n-m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{2\pi\cot\frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}\ldots.(10).$$

III. Um das Integral $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ zu erhalten, hat man nach §. 133 das unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{(1-x^2)} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

wonach $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{n-1}{n}\int_0^1 \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$.

Daraus ergeben sich folgende zwei Reihen:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot\pi}{2\cdot 2}, \qquad \int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = 2/3,$$

$$\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\pi}{2\cdot 4\cdot 2} \qquad \int_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5},$$

$$\int_0^1 \frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\pi}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2}, \quad \int_0^1 \frac{x^7dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7},$$

. . . .

$$\int_0^1 \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)\pi}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r\cdot 2}, \int_0^1 \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2r}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2r+1)}.$$

Das Product dieser Resultate liefert:

$$\int_0^1 \frac{x^{2r}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

IV. Eine Umwandlung der letzten Gleichung führt zu dem Werthe des Integrals $\int_0^\infty \varepsilon^{-t^2}dt$, das häufige Anwendung findet. Macht man nämlich in dieser Gleichung $x=\varepsilon^{-qt^2}$, so wird sie:

$$4q^2\left[\int \frac{tdt\varepsilon^{-qt^2}\cdot\varepsilon^{-2qrt^2}}{\sqrt{(1-\varepsilon^{-2qt^2})}}\right]\left[\int \frac{tdt\varepsilon^{-qt^2}\cdot\varepsilon^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{(1-\varepsilon^{-2qt^2})}}\right] = \frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man nun $q(2r+1)=1$ und bringt den Werth von $2r+1$ in das zweite Glied; so wird das Ganze durch q theilbar und man erhält:

$$2\left\{\int \frac{tdt\varepsilon^{-t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1-\varepsilon^{-2qt^2}}{2q}\right)}}\right\}\left\{\int \frac{tdt\,\varepsilon^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\left(\frac{1-\varepsilon^{-2qt^2}}{2q}\right)}}\right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Da die Grenze von $\frac{1-\varepsilon^{-2qt^2}}{2q}$, wenn man $r=\infty$, mithin $q=o$ macht, t^2 ist; so reducirt sich unsere Gleichung auf $2\left(\int_0^\infty \varepsilon^{-t^2}dt\right)^2=\frac{\pi}{2}$ oder auf $\int_0^\infty \varepsilon^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{(\pi)}$.

Note XV zu §. 164.

Einige Sätze über die Lemniscate.

1) Fällt man von dem Mittelpunkte einer Hyperbel (Fig. 48), deren Halbachsen a und b sind, auf alle ihre Berührungslinien Perpendikel; so liegen die Fußpunkte dieser Perpendikel sämmtlich auf einer Lemniscate, welche mit der Hyperbel den Mittelpunkt und die Scheitel gemein hat. Bezeichnen wir nämlich mit x', y' die Coordinaten der Hyperbel, so ist ihre Gleichung: $\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1$;

die Gleichung ihrer Berührungslinie: $\frac{x'}{a^2}x-\frac{y'y}{b^2}=1$;

die Gleichung der auf die letztere Linie aus dem Mittelpunkte gefällten Senkrechte: $a^2y'x+b^2x'y=o$.

Eliminirt man jetzt x', y' aus diesen drei Gleichungen, so erhält man für den geometrischen Ort der Fußpunkte sämmtlicher Tangenten die Gleichung:

$$a^2x^2-b^2y^2=(x^2+y^2)^2 \ldots.,$$

welche einer Lemniscate angehört.

2) Setzen wir in dieser Gleichung $x=l\cos u$, $y=l\sin u$; so erhalten wir die Polargleichung der Lemniscate, nämlich:

$$l^2=a^2\cos^2u-b^2\sin^2u.$$

Nennen wir h den dem Winkel u entsprechenden Radiusvector der Hyperbel, so ist ihre Polargleichung:

$$h^2(b^2\cos^2u-a^2\sin^2u)=a^2b^2.$$

Im Fall die Hyperbel gleichseitig ist, haben wir für die Polargleichung der Hyperbel: $h^2=\frac{a^2}{\cos 2u} \ldots. (1)$;

und für die der Lemniscate: $l^2=a^2\cos^2u \ldots. (2)$;

aus welchen Gleichungen für die entsprechenden Leitstrahlen der beiden Curven die einfache Relation $lh=a^2 \ldots. (3)$ entspringt.

3) Aus den Gleichungen (1) und (2) entsteht durch Differentiation:

$$du=+\frac{a^2dh}{h\sqrt{(h^4-a^4)}}, \qquad du=-\frac{ldl}{\sqrt{(a^4-l^4)}},$$

weil für die Lemniscate der Leitstrahl abnimmt, wenn u wächst.

Im Allgemeinen wird aber die Bogenlänge s einer auf Polarcoordinaten bezogenen Curve, deren Leitstrahl r mit der Achse einen Winkel u bildet, durch die Gleichung $s=\int\sqrt{(dr^2+r^2du^2)}$ bestimmt. Wir haben daher, wenn die Bogenlängen unserer beiden Curven bezüglich durch H und L bezeichnet werden:

$$H=\int\frac{h^2dh}{\sqrt{(h^4-a^4)}}, \qquad L=\int-\frac{a^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}},$$

wo wir die Bogen im Scheitel der Hyperbel ihren Anfang nehmen lassen wollen. Mittelst der Relation (3) verwandelt sich der Werth von H in

$$H=\int-\frac{a^4dl}{l^2\sqrt{(a^4-l^4)}}.$$

Integrirt man dies nach Formel C §. 132, so wird H

$$=\frac{\sqrt{(a^4-l^4)}}{l}+\int\frac{l^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}}.$$

Dies vorausgeschickt, wird nun der Unterschied D zwischen der Länge der vom Mittelpunkt aus gezählten, unendlichen Asymptote der Hyperbel und der Länge eines halben vom Scheitel aus gezählten, unendlichen Hyperbelzweiges dem Werthe gleichgeltend sein, in welchen der Unterschied h—H oder $\frac{a^2}{l}-H$ zwischen dem Leitstrahl und dem entsprechenden Bogen übergeht, wenn dieser Leitstrahl unendlich oder $l=o$ ist; d. h. man hat $D=\frac{a^2}{l}-\frac{\sqrt{(a^4-l^4)}}{l}-\int\frac{l^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}}$ zwischen den Grenzen $l=o$ und $l=a$.

Nun verschwindet aber der von dem Integralzeichen befreite Ausdruck an jenen beiden Grenzen; es ist daher ganz einfach:

$$D=\int_o^a-\frac{l^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}}.$$

Eben so erhält man für den vierten Theil L der Lemniscate:

$$L=\int_o^a-\frac{a^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}}.$$

Hiernach findet man, wenn die Ordnung der Grenzen umgekehrt wird:

$$D+L=\int_a^0\left[\frac{l^2}{\sqrt{(a^4-l^4)}}+\frac{a^2}{\sqrt{(a^4-l^4)}}\right]dl=\int_a^0 dl\sqrt{\frac{(a^2+l^2)}{(a^2-l^2)}}.$$

Wird jetzt über der Querachse AB der Hyperbel als kleine Achse eine Ellipse construirt, deren große Achse KG $=2a\sqrt{(2)}$ ist; so hat man, wenn y die der Abcisse l entsprechende Ordinate bezeichnet, für diese Ellipse die Gleichung: $2l^2+y^2=2a^2$.

Für die Bogenlänge E′ gedachter Ellipse hat man den Ausdruck $E'=\int dl\sqrt{\frac{(a^2+l^2)}{(a^2-l^2)}}$, weil $dy=-\frac{\sqrt{(2\cdot ldl)}}{\sqrt{(a^2-l^2)}}$; mithin der elliptische Quadrant $E'=\int_a^0 dl\frac{\sqrt{(a^2+l^2)}}{\sqrt{(a^2-l^2)}}$. Es ist folglich $D+L=E'$.

4) Wird dagegen über der Querachse AB als große Achse eine Ellipse construirt, deren kleine Achse $CP=FF'$ ist; so erhält man $l^2+2y^2=a^2$ als Gleichung dieser zweiten Ellipse, welche der erstern Ellipse ähnlich sein wird. Der Quadrant E′ der letztern ist daher $=E\sqrt{(2)}$, wo E den Quadranten der andern Ellipse darstellt; man hat folglich auch

$$D+L=E\sqrt{(2)}.$$

5) Nach der in II der vorhergehenden Note erwiesenen allgemeinen, zwischen den Grenzen $x=1$ und $x=o$ bestehenden Formel (10)

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\cdot\int\frac{x^{n-m-1}}{\sqrt{(1-x^n)}}dx=\frac{2\pi\cot\frac{m\pi}{n}}{n(n-2m)}$$

erhält man, wenn $m=1$, $n=4, x=\frac{l}{a}$ gesetzt wird: innerhalb der Grenzen $l=a$ und $l=o$:

$$\int\frac{a^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}}\cdot\int\frac{l^2dl}{\sqrt{(a^4-l^4)}}=\frac{\pi a^2}{4};$$

folglich auch $LD'=\frac{\pi a^2}{4}$.

6) Aus der Gleichung (2) folgt, daß man für den Leitstrahl l nur so lange reelle Werthe erhält, als der Winkel u nicht über 45^0 steigt. Für den Flächeninhalt des vierten Theils der Lemniscate hat man so das bestimmte Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2u\,du=\frac{a^2}{4}$. Wenn

man nun den Umstand, daß sich die Curve nicht über $u = 45^0$ hinaus erstreckt, unberücksichtigt läßt, und dann das Flächenstück, welches zwischen der Achse und der aus dem Mittelpunkt darauf errichteten Senkrechte enthalten ist, bestimmen, d. h. unser Integral innerhalb der Grenzen $u=o$ und $u=90^0$ nehmen wollte; so sollte man vermuthen, daß man ein aus einem reellen und einem imaginären Ausdrucke bestehendes Resultat erhalten werde, wovon der reelle Ausdruck dem vierten Theil des Flächeninhaltes der Curve und der imaginäre dagegen dem Raume entspräche, wo die Curve gar nicht existirt. Dem ist aber nicht so, da das zwischen den Grenzen $u=o$ und $u=90^0$ genommene Integral sich als Null herausstellt. Die auf dem Wege des Integrirens gefundenen Resultate müssen daher untersucht werden, ob die innerhalb der gewählten Grenzen genommenen Integrale auch zwischen denselben jederzeit reell sind.

Note XVI zu §. 170.

Einige zur Complanation und Cubatur der Körper gehörige Aufgaben.

1) Die Oberfläche des durch die Umdrehung einer Cycloide AMF (Fig. 5) um ihre Achse AE erzeugten Körpers zu bestimmen. Die Cycloide werde durch das System der beiden Gleichungen $x=r\,(t-\sin t)$, $y=r\,(1-\cos t)$ dargestellt (s. §. 167 der analytischen Geometrie in der Ebene). Die allgemeine Formel $u=2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ gibt uns, indem wir den Winkel t zwischen den Grenzen o und 2π liegend annehmen:

$$u=2^{3/2}\pi r^2\int_o^t(1-\cos t)^{3/2}dt=8\pi r^2\int_o^t \sin^3\frac{t}{2}\,dt,$$

$$\text{oder } u=4\pi r^2\left(\frac{8}{3}-3\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}\right).$$

Macht man $t=2\pi$, so findet man für die Oberfläche A des durch einen ganzen Zweig der Cycloide beschriebenen Körpers: $A=\frac{64}{3}\pi r^2$.

2) Für das Volumen v dieses Rotationskörpers hat man

$$v=\pi r^3\int_o^t(1-\cos t)^3\,dt,$$

$$\text{oder } v=\frac{\pi r^3}{4}\int_o^t(10-15\cos t+6\cos 2t-\cos 3t)\,dt,$$

$$\text{d. h. } v=\frac{\pi r^3}{4}\left(10t-15\sin t+3\sin 2t-\tfrac{1}{3}\sin 3t\right).$$

Macht man $t=2\pi$, so erhält man für das Volumen B des durch Umdrehung eines Zweiges erzeugten Körpers: $B=5\pi^2r^3$.

3) Es sei $x^2-rx+z^2=0$ die Gleichung eines Cylinders; man soll den Inhalt des Stückes von seinem Mantel angeben, welches von der aus dem Ursprung als Mittelpunkt mit dem Radius r beschriebenen Kugel eingeschlossen wird. Diese Kugel hat einen Radius r mit einem Durchmesser der in der Ebene xz liegenden kreisförmigen Basis des Cylinders zusammenfallend, und $x^2+y^2+z^2=r^2$ zur Gleichung. Sie schneidet den Cylinder in einer Curve, deren Projection auf der Ebene xy durch die Gleichung $y^2=(r-x)r$ dargestellt wird. Der allgemeinen Formel

$$U=\iint dxdy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$$

zufolge ist der Inhalt des Stückes von dem Cylindermantel, welches auf der Seite der positiven z liegend durch die Durchschnittslinie des Cylinders mit der Kugel begrenzt wird, mit dem Integral:

$$\int_0^r 2\sqrt{[r(r-x)]}\cdot\frac{\frac{1}{2}r\,dx}{\sqrt{(rx-x^2)}}=r^{\frac{3}{2}}\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{(x)}}=2r^2.$$

gleichbedeutend, insofern man erwägt, daß hier $q=0$, $p=\frac{\frac{1}{2}r-x}{\sqrt{(rx-x^2)}}$, und die Grenzen von y bezüglich $-\sqrt{(r[r-x])}$ und $+\sqrt{(r[r-x])}$ sind. Nimmt man das Integral doppelt, so erhält man für den Flächeninhalt A des innerhalb der Kugel sowohl auf der Seite der positiven als auch auf jener der negativen y befindlichen Cylinderstückes den Ausdruck: $A=4r^2$.

4) Das Volumen des zwischen der Ebene xy, einer Cylinderfläche, deren Gleichung $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, wo a und b positiv und größer als r, und der Oberfläche des durch die Gleichung $xy=cz$ dargestellten hyperbolischen Paraboloids enthaltenen Körpers anzugeben. Die allgemeine Formel $V=\iint z\,dxdy$ liefert

$$V=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}xydydx=\frac{1}{2c}\int_{x0}^{x1}\left(y1^2-y0^2\right)xdx.$$

Es ist aber $y_0=b-\sqrt{[r^2-(x-a)^2]}, y_1=b+\sqrt{[r^2-(x-a)^2]}$, $x_0=a-r,\ x_1=a+r$; folglich $V=2\frac{b}{c}\int_{a-r}^{a+r}\sqrt{[r^2-(x-a)^2]}\,xdx$.

Setzt man $x-a=rt$, so kommt

$$V=2\frac{b}{c}r^2\int_{-1}^{+1}(a+rt)\sqrt{(1-t^2)}dt.$$

Nun ist $\int_{-1}^{+1}t\sqrt{(1-t^2)}\cdot dt=0$ und $\int_{-1}^{+1}\sqrt{(1-t^2)}\cdot dt=\frac{\pi}{2}$;

also $V=\pi r^2\frac{ab}{c}$.

Note XVII zu §. 220.

Auflösung der in diesem Paragraphen angeführten Aufgaben.

1) In Bezug auf Aufgabe I. Die Aufgabe gibt uns die Gleichung $y\frac{dy}{dx}=x$, aus welcher durch Integration $y^2=x^2+c$ entsteht. Diese Gleichung gehört einer gleichseitigen Hyperbel an, insofern c nicht Null wird, dagegen entspricht sie zwei geraden Linien für den Fall, daß $c=o$ ist.

2) In Bezug auf Aufgabe II. Stellen x,y die Coordinaten der fraglichen Curve dar, so ist die Gleichung ihrer Berührungslinie $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)\ldots(1)$. Nimmt man zum Ursprung der Coordinaten den gegebenen Punkt, aus dem die Senkrechten gefällt werden; so ist die Gleichung einer derselben: $Y=-\frac{dx}{dy}X\ldots(2)$, und ihre Länge $=\sqrt{(X^2+Y^2)}$. Für den Durchschnitt der beiden Geraden (1) und (2) findet man:

$$X=\frac{(xdy-ydx)dy}{dx^2+dy^2},\quad Y=-\frac{(xdy-ydx)dx}{dx^2+dy^2};$$

$$\text{folglich } \sqrt{(X^2+Y^2)}=\frac{xdy-ydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=a,$$

$$\text{oder } xdy-ydx=a\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Der Kreis, welcher $y^2+x^2=a^2$ zur Gleichung hat, gibt die besondere Auflösung unserer Differentialgleichung ab, während das vollständige Integral, nämlich $y-cx=a\sqrt{(1+c^2)}$ unzählig viele Geraden darstellt.

3) In Bezug auf Aufgabe III. Man hat $-\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\sqrt{(ax)}$;

$$\text{daraus } \frac{dx}{x^{1/2}}=-\frac{a^{1/2}\cdot dy'}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Durch Integration ergibt sich: $2x^{1/2}+2c=-\frac{a^{1/2}y'}{(1+y'^2)^{1/2}}$.

Hieraus entspringt $dy=\frac{2(x^{1/2}+c)dx}{[a-4(x^{1/2}+c)^2]^{1/2}}$. Setzt man $x^{1/2}+c=z$,

$$\text{so kommt } y=\int\frac{4z(z-c)dz}{(a-4z^2)^{1/2}}=-c(a-4z^2)^{1/2}+4\int\frac{z^2dz}{(a-4z^2)^{1/2}},$$

oder $y = -\left(c+\frac{z}{2}\right)(a-4z^2)^{1/2}+\frac{a}{4}\,\text{arc}\left(\sin=\frac{2z}{\sqrt{(a)}}\right)+c'$,
in welchem Ausdrucke $x^{1/2}+c$ statt z zu setzen ist.

4) In Bezug auf Aufgabe IV. Es ist $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=a(1+y'^2)^{3/2}.y^3$;
woraus $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{ay^3}$. Durch Integration erhält man $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\frac{1}{ay^2}+c$;
hieraus durchs Integriren $x+c'=\frac{\left(-\frac{1}{a}+cy^2\right)^{1/2}}{c}$, welche Gleichung einem Kegelschnitt angehört.

Note XVIII zu §. 290.

Ueber die Loxodrome auf dem elliptischen Sphäroid.

Unter Loxodrome versteht man eine auf der Oberfläche eines Rotationskörpers liegende Linie, welche sämmtliche Meridiane unter einem constanten Winkel schneidet. Hier wollen wir uns nur mit der Loxodrome auf dem elliptischen Sphäroid beschäftigen.

1) Bei der Wahl eines rechtwinkligen Coordinatensystems wird das elliptische Sphäroid, welches durch die Umdrehung einer Ellipse, deren Hauptachsen 2a und 2b sind, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und Durchmesser 2a mit der Rotationsachse zusammenfällt, welche zugleich die Achse der z ist, entsteht, durch folgende Gleichung dargestellt:

$$x^2+y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)\ \ldots\ (1)$$

Die Gleichungen der durch den Punkt (x,y,z) des Sphäroids gelegten Berührungs- und Meridian-Ebene sind

$$Z-z=-\frac{a^2x}{b^2z}(X-x)-\frac{a^2y}{b^2z}(Y-y)\ \ldots.\ (2)$$

$$\text{und } xY=yX\ \ldots.\ (3)$$

Diese beiden Gleichungen oder die zwei daraus hergeleiteten

$$\left.\begin{aligned}(Z-z)\frac{zx}{a^2-z^2}&=-(X-x)\\(Z-z)\frac{zy}{a^2-z^2}&=-(Y-y)\end{aligned}\right\}\ \ldots.\ (4)$$

gehören mithin der Berührungslinie des durch den Punkt (x,y,z) gehenden Meridians an. Sind nun x, y, z die Coordinaten eines Punktes unserer

Loxodrome, so werden die Gleichungen der durch gedachten Punkt an die Curve gelegten Berührungslinie sein:

$$X-x=\frac{dx}{dz}(Z-z),\ Y-y=\frac{dy}{dz}(Z-z)\ \ldots.(5),$$

wo die Differentialcoefficienten dergestalt zu bestimmen sind, daß die Berührungslinie auf der Tangentialebene (2) liege und mit der Berührungslinie des Meridians (4) einen constanten Winkel α bilde. Die erste dieser Bedingungen, nach welcher die Gleichungen (2) und (5) gleichzeitig bestehen müssen, liefert uns, wenn $X-x$ und $Y-y$ eliminirt werden, folgende Relation:

$$b^2z=-a^2x\frac{dx}{dz}-a^2y\frac{dy}{dz}\ldots.(6)$$

Die zweite Bedingung gibt, wenn wir die in der analytischen Geometrie im Raume für den Winkel zweier Geraden aufgestellten Formel benützen, für den Winkel, welchen die Berührungslinien (4) und (5) mit einander machen, die Gleichung:

$$\cos\alpha=\frac{1-\frac{zx}{a^2-z^2}\cdot\frac{dx}{dz}-\frac{zy}{a^2-z^2}\cdot\frac{dy}{dz}}{\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}\right)}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{z^2x^2}{(a^2-z^2)}+\frac{z^2y^2}{(a^2-z^2)^2}\right)}},$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (6):

$$a^2(a^2-z^2)\sin^2\alpha+b^2z^2=a^2(a^2-z^2)\left(\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}\right)\cos^2\alpha\ldots(7).$$

Die Gleichungen (1), (6) und (7) enthalten die Auflösung unsers Problems. Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die Variable z nebst ihrem Differential dz, so bekommen wir folgende, der Projection der Loxodrome auf der Ebene xy angehörige Gleichung:

$$(x^2+y^2)[(dx^2+dy^2)b^2(b^2-x^2-y^2)\cos^2\alpha-a^2(xdx+ydy)^2\sin^2\alpha]$$
$$=(xdx+ydy)^2(b^2-x^2-y^2)b^2\ldots.(8)$$

Diese Gleichung wird bedeutend einfacher, wenn wir zu den Polarcoordinaten übergehen. Es seien deshalb u der Radiusvector und t der Winkel, welchen derselbe mit der Achse der x macht; mithin $x=u\cos t$, $y=u\sin t$, $x^2+y^2=u^2$, $dx^2+dy^2=du^2+u^2dt^2$, $(xdx+ydy)=udu$.

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (8) in

$$b^2u^2(b^2-u^2)dt^2=tg^2\alpha[(a^2-b^2)u^2+b^4]du^2,$$

woraus $b dt \cot\alpha=du\dfrac{\sqrt{([a^2-b^2]u^2+b^4)}}{u\sqrt{(b^2-u^2)}}\ldots.(9).$

Um die letztere Gleichung zu integriren, setzen wir vorerst $\sqrt{([a^2-b^2]u^2+b^4)}=uv+b^2$, woraus $u=\frac{2b^2v}{a^2-b^2-v^2}$;

ferner $du=2b^2.\frac{a^2-b^2+v^2}{(a^2-b^2-v^2)^2}dv$; $\sqrt{([a^2-b^2]u^2+b^4)}=b^2\frac{(a^2-b^2+v^2)}{a^2-b^2-v^2}$;

$$\sqrt{(b^2-u^2)}=b\frac{\sqrt{([a^2-b^2]^2-2(a^2+b^2)v^2+v^4)}}{a^2-b^2-v^2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe nimmt die Gleichung (9) folgende Gestalt an:

$$2dt\cot\alpha=\frac{2vdv(a^2-b^2+v^2)^2}{v^2(a^2-b^2-v^2)\sqrt{([a^2-b^2]^2-2(a^2+b^2)v^2+v^4)}},$$

oder, wenn $v^2=w$ gesetzt wird:

$$2dt\cot\alpha=\frac{(a^2-b^2+w)^2dw}{w(a^2-b^2-w)\sqrt{([w-(a+b)^2][w-(a-b)^2])}}\ldots.(10).$$

Um die Irrationalität wegzubringen, mache man

$$\sqrt{([w-(a+b)^2][w-(a-b)^2])}=m[w-(a-b)^2].$$

Daraus entspringt

$$w=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2m^2}{1-m^2};$$

$$a^2-b^2+w=2a.\frac{(a+b)-(a-b)m^2}{1-m^2};$$

$$a^2-b^2-w=-2b.\frac{(a+b)+(a-b)m^2}{1-m^2};$$

$$\sqrt{([w-(a+b)^2])[w-(a-b)^2]}=\frac{4abm}{1-m^2};$$

$$dw=\frac{8abmdm}{(1-m^2)^2}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe verwandelt sich die Formel (10) in:

$$-\frac{bdt\cot\alpha}{2a^2}=\frac{[a+b-(a-b)m^2]^2dm}{(1-m^2)[(a+b)^2-(a-b)^2m^2][a+b+(a-b)m^2]}\ldots.(11).$$

Indem man den zweiten Theil dieser Gleichung in seine Partialbrüche zerlegt, findet man:

$$-bdt\cot\alpha=\frac{b}{2}\left\{\frac{dm}{1+m}+\frac{dm}{1-m}-\frac{(a-b)dm}{a+b+(a-b)m}-\frac{(a-b)dm}{a+b-(a-b)m}\right\}$$
$$+\frac{2(a^2-b^2)dm}{a+b+(a-b)m^2}.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration:

$$C-2t\cot\alpha=\log\frac{(1+m)[a+b-(a-b)m]}{(1-m)[a+b+(a-b)m]}+\frac{4(a^2-b^2)}{b}\int\frac{dm}{a+b+(a-b)m^2}.$$

Um das letzte Glied zu integriren, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich den, wo das Ellipsoid ein längliches, und jenen, wo dasselbe ein abgeplattetes ist.

2) Für den ersten Fall, wo $a>b$, haben wir

$$4\left(\frac{a^2-b^2}{b}\right)\int\frac{dm}{a+b+(a-b)m^2}=\frac{4\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\operatorname{arc}\left\{\operatorname{tang}=m\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\right\};$$

folglich $$C-2t\cot\alpha=\log\frac{(1+m)[a+b-(a-b)m]}{(1-m)[a+b+(a-b)m]}$$

$$+4\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=m\frac{\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}}\right).$$

3) Für den zweiten Fall, wo $a<b$, finden wir

$$4\left(\frac{a^2-b^2}{b}\right)\int\frac{dm}{a+b+(a-b)m^2}=$$

$$-\frac{2\sqrt{(b^2-a^2)}}{b}\log\frac{\sqrt{(b+a)}+m\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(b+a)}-m\sqrt{(b-a)}};$$

folglich $$C-2t\cot\alpha=\log\frac{(1+m)[a+b-(a-b)m]}{(1-m)[b+a-(b-a)m]}$$

$$-\frac{2\sqrt{(b^2-a^2)}}{b}\log\frac{\sqrt{(b+a)}+m\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(b+a)}-m\sqrt{(b-a)}}.$$

4) Für die Kugel, wo $a=b$, geht die Formel (9) sofort in $dt\cot\alpha=\frac{a\,du}{u\sqrt{(a^2-u^2)}}$ über, woraus durch Integration sich ergibt:

$$t\cot\alpha=\log C\frac{a-\sqrt{(a^2-u^2)}}{u}.$$

Soll die Loxodrome die Meridiane unter einem rechten Winkel schneiden, so muß $du=o$, mithin $u=$constant sein, weil $\cot\alpha=o$: im vorliegenden Fall ist also die Loxodrome ein beliebiger Parallelkreis.

Hat man dagegen $\alpha=$Null, so ist $dt=o$, mithin $t=$ einer constanten Größe: die Loxodrome fällt folglich dann mit einem beliebigen Meridian zusammen.

Note XIX zu §. 225.

Um zu beweisen, daß $\mu R - \frac{dU}{dz}$ sich auf eine bloße Funktion von z reducire, wenn die Bedingungsgleichung (2) des §. 223 erfüllt wird, muß das Differential von $\mu R - \frac{dU}{dz}$ in Bezug auf x verschwinden, insofern man statt y seinen aus der Gleichung $U+Z=o$ entnommenen Werth substituirt. Man hat also, indem vermöge der letztern Relation y als eine Funktion von x und Z angesehen werden kann, folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)}{dx} + \frac{d\left(\mu R - \frac{dU}{dz}\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = o \ldots . (A),$$

oder nach ausgeführter Entwickelung:

$$\mu \frac{dR}{dx} + \frac{Rd\mu}{dx} - \frac{d^2U}{dxdz} + \left(\mu \frac{dR}{dy} + \frac{Rd\mu}{dy} - \frac{d^2U}{dy\,dz}\right)\frac{dy}{dx} = o.$$

Nun ist aber $\frac{dU}{dx} = \mu P$ und $\frac{dU}{dy} = \mu Q \ldots . (B)$,

$$\text{mithin } \frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d(\mu P)}{dz} = \frac{\mu dP}{dz} + \frac{Pd\mu}{dz},$$

$$\frac{d^2U}{dydz} = \frac{d(\mu Q)}{dz} = \frac{\mu dQ}{dz} + \frac{Qd\mu}{dz};$$

$$\text{ferner } \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = o \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (B), so kommt:

$$\left\{\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right)\mu + R\,\frac{d\mu}{dx}\right\}Q \;-\left\{\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right)\mu + R\,\frac{d\mu}{dy}\right\}P = o \ldots . (C).$$

Ueberdies genügt der Factor, welcher $\mu Bx + \mu Qdy$ zu einem genauen Differential macht, der Relation:

$$\mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) + \frac{P \cdot d\mu}{dy} - \frac{Q \cdot d\mu}{dx} = O \ldots . (D).$$

Multiplicirt man jetzt diese Gleichung (D) mit R und addirt sie dann zur Gleichung (C), so geht das Resultat genau in die Bedingungsgleichung (2) über, welche demnach nichts anders als die Relation (A) ausdrückt.

Note XX zu §. 944.

Unter den Differentialgleichungen gibt es deren, welche sich nicht integriren lassen und denen man dessenohngeachtet auf unendlich viele Arten Genüge thun kann, wie Euler zuerst bemerkt hat. Einen solchen Fall bietet uns die einfache Gleichung $\frac{d^2z}{dxdy}=az$ dar. Macht man nämlich darin $z=A\varepsilon^{\alpha x}Y$, wo Y eine bloße Funktion von y sein soll; so findet man $\alpha\varepsilon^{\alpha x}\frac{dY}{dy}=a\varepsilon^{\alpha x}Y$, woraus $\frac{dY}{Y}=\frac{ady}{\alpha}$, $Y=\varepsilon^{\frac{ay}{\alpha}}$. Es ist folglich $z=A\varepsilon^{\alpha x+\frac{ay}{\alpha}}$, wo α und A ganz beliebig genommen werden können. Wir entnehmen daraus folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$z=A\varepsilon^{\alpha x+\frac{ay}{\alpha}}+B\varepsilon^{\beta x+\frac{ay}{\beta}}+C\varepsilon^{\gamma x+\frac{ay}{\gamma}}+\text{ꝛc.},$$

wo B, C .... β, γ .... wieder ganz willkührlich sind.

2) Die Ausdrücke $z=A\sin(\alpha x+\beta y)$, $z=B\cos(\alpha x+\beta y)$ genügen ebenfalls der vorgelegten Gleichung, insofern $-\alpha\beta=a$, was eine der beiden Größen α, β unbestimmt läßt. Der Ausdruck:

$$z=A\sin\left(\alpha x-\frac{ay}{\alpha}\right)+A'\sin\left(\alpha'x-\frac{a}{\alpha}\,y\right)+\text{ꝛc.}$$

$$+B\cos\left(\alpha x-\frac{ay}{\alpha}\right)+B'\cos\left(\alpha'x-\frac{a}{\alpha'}\,y\right)+\text{ꝛc.},$$

in welchem A, A' .... B, B', α, α' .... alle möglichen Werthe erhalten können, bietet daher eine Auflösung unserer Differentialgleichung dar.

3) Ebenso verhält es sich mit der Gleichung

$$Rr+Ss+Tt+Pp+Qq+Nz=0,$$

wenn R, S, T, P, Q, N constante Größen sind. Macht man darin $z=A\varepsilon^{\alpha x+\beta y}$, so reducirt sie sich auf: $R\alpha^2+S\alpha\beta+T\beta^2+P\alpha+Q\beta+N=0$, wo A wie einer der Exponenten α, β unbestimmt bleibt. Nimmt man daher die willkührlichen Größen α, α', α'' .... und bezeichnet die entsprechenden Werthe von β bezüglich mit b und c, mit b' und c' ....; so wird folgender allgemeine Ausdruck:

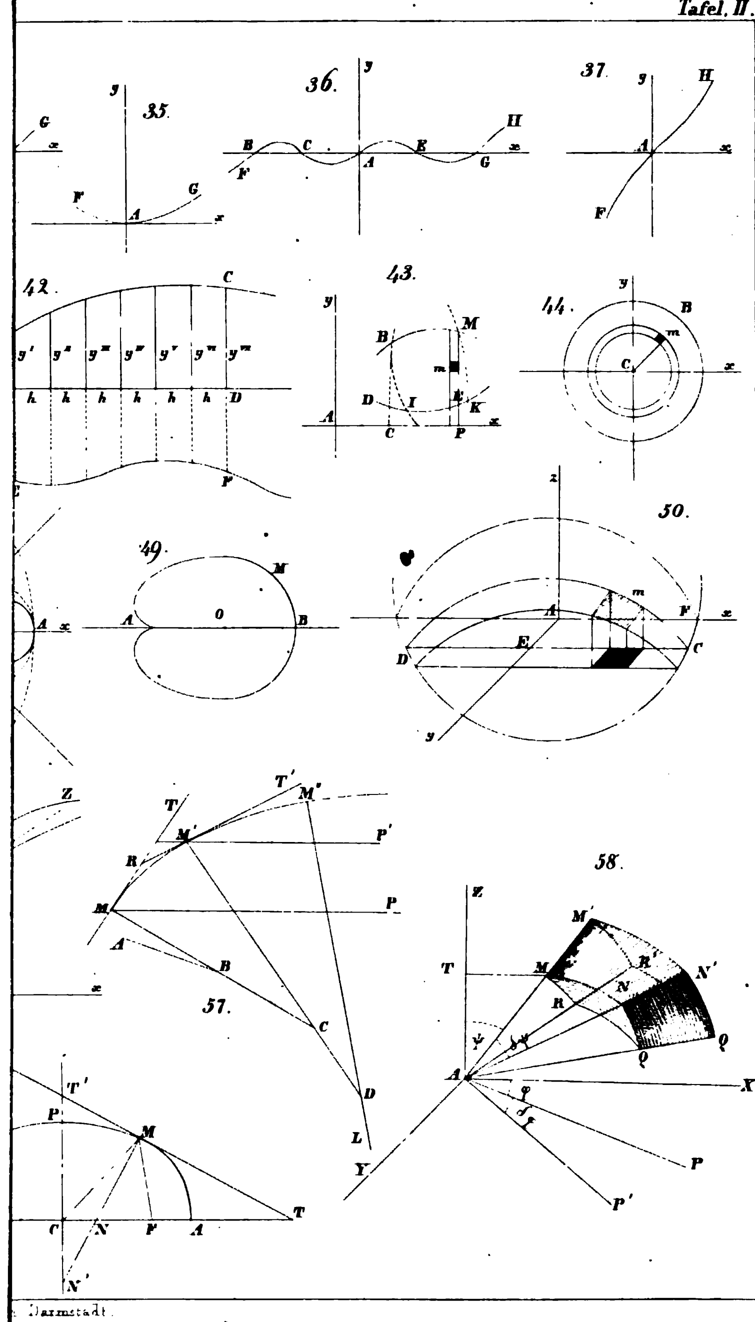
$$z = A\varepsilon^{\alpha x + by} + A'\varepsilon^{\alpha' x + b'y} + \text{rc.},$$

$$+ B\varepsilon^{\alpha x + cy} + B'\varepsilon^{\alpha' x + c'y} + \text{rc.},$$

eine Auflösung der gegebenen Differentialgleichung sein.

4) Setzt man $\alpha = m + n\sqrt{(-1)}$, $\alpha' = m - n\sqrt{(-1)}$, woraus $b = p + q\sqrt{(-1)}$ und $b' = p - q\sqrt{(-1)}$, wo p und q von m und n abhängig sind; so verwandeln sich die beiden ersten Glieder des Ausdruckes von z in $z = \varepsilon^{mx+py}[A_{,}\cos(nx+qy) + A'_{,}\sin(nx+qy)]$, welchem Werthe man unzählig viele Glieder von derselben Form hinzuzufügen hat.

Man sieht bald ein, daß sich dies Verfahren auf alle partiellen Differentialgleichungen vom ersten Grade mit constanten Coefficienten erstreckt, vorausgesetzt, daß das von z abhängige Glied nicht fehlt. Es gibt noch andere Formen von solchen Gleichungen, die dergleichen besondere Auflösungen zulassen, in welcher Hinsicht wir den Leser auf den dritten Band von Euler's Integralrechnung verweisen.



Darmstadt.

